量子数理物理学における汎関数積分法

Functional Integral Methods in Quantum Mathematical Physics

新井朝雄　著

共立出版

序　　　文

本書の表題にある「量子数理物理学 (quantum mathematical physics)」とは，一言でいえば，量子現象に関する数理物理学，すなわち，量子現象を支え，保持する普遍的な数学的理法や数学的構造の探究を行う学のことである．量子数理物理学は，関数解析学を中心として，現代数学の数多くの領域と関わる．

一方，本書の内容を特徴づけるもう一つの術語「汎関数積分 (functional integral)」は，概念図式的には，汎関数，すなわち，無限次元の関数空間から実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ への写像――より一般的には，無限次元ヒルベルト空間や無限次元バナッハ空間をその部分集合として含む位相空間上の実数値関数または複素数値関数――に関する積分を指す．汎関数の定義域は無限次元的であるから，汎関数積分は，次元的な観点からは，無限次元積分――平たくいえば無限個の変数による積分――の範疇の一つに属する．この無限次元性のゆえに，汎関数積分の数学的に厳密な理論の構築には，通常の有限次元積分――有限個の実変数または複素変数による積分――にはない難しさが伴う．だが，汎関数積分論を構築することは，構造論的にも，有限次元積分論の無限次元的拡張としても，ごく自然なものである．それは，数理哲学的には，積分の理念(イデア)のより高次の相での展開を追跡し，認識する過程の一部をなす．無限次元積分の純数学的な観点からの研究は，歴史的には，すでに 1910 年代頃から開始されており，種々の重要な結果が得られている[1]．

物理学の歴史における汎関数積分の概念の現れは，20 世紀における偉大な物理学者の一人であったファインマンの論文 (1948) に見られる[2]．この論文にお

---

[1] より詳しい歴史的概観および基本的な結果については，たとえば，ブルバキ,『数学原論　積分 5』(東京図書，1970) を参照．

[2] R. Feynman, *Rev. Modern Phys.* **20** (1948), 367–387 および彼の学位論文 (1942)．ファインマン（米，1918～1988）は，量子電磁力学の発展への寄与に対して，朝永振一郎（1906～1979），シュヴィンガー（米，1918～1994）とともに 1965 年度のノーベル物理学賞を受賞した．

いて，ファインマンは，量子系の状態に関する遷移確率振幅と呼ばれる量を，然るべき条件を満たす経路（曲線）全体の集合にわたるある種の“和”—“経路積分”(path integral)—として表示する公式を，非相対論的量子力学の枠組みにおいて，形式的・発見法的に導いた．この型の公式は，今日，ファインマンの経路積分公式と呼ばれる[3]．ファインマンの経路積分の方法は，その後，非相対論的量子力学だけでなく，相対論的量子力学や量子場の理論へも拡張され，理論物理学における有用な発見法的道具の一つになった．だが，ファインマンの経路積分—形式的には，汎関数積分の一種と推測される—に対して数学的に厳密な意味づけを行うことは極度に困難であることが認知されるようになる．実際，非相対論的量子力学の標準的なモデルについては，ある“自然な”意味において，無限次元の複素測度による汎関数積分としてのファインマンの経路積分は存在しないことが証明される[4]．

ところで，遷移確率振幅は時間変数 $t \in \mathbb{R}$ を含む．そこで，これを純虚数 $-it$ ($t > 0$；i は虚数単位）に変えて，量子系の“時間”発展—純虚数時間で“測った”系の状態変化—を考えてみる．すると，興味深いことに，ファインマンの経路積分は，その数学的存在（無限次元測度による積分としての存在）が暗示される形に姿を変える．実際，そのように変容したファインマンの経路積分—純虚数時間経路積分—については，数学的に厳密な基礎づけが可能な場合があり，20 世紀後半から現在まで，量子数理物理学および（確率論的）無限次元解析学における重要な研究対象の一つであり続けてきた．

本書は，いま言及した純虚数時間経路積分およびこれを包括する汎関数積分の，量子数理物理学との関連における数学的理論への入門書である．だが，入門書とはいえ，本書を通読するには，少なくとも次に掲げる分野の標準的知識

---

[3] 経路積分的な着想自体は，確率過程論におけるウィーナー積分 (1923) など，先行する研究にすでに見い出される．

[4] R. Cameron, *J. Math. and Phys.* **39** (1960), 126–140；M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.II* (Academic Press, 1975) の X 章の問題 64 (pp. 346–347)．ただし，ディラック作用素で記述される相対論的量子力学のモデルの場合はその限りではない（T. Ichinose, Proc. Japan Acad. **58** (1982), 290–293；一瀬 孝，数学 **42** (1990), 219–230)．無限次元（複素）測度による積分という考え方にこだわらなければ，一定のクラスのファインマン経路積分については，有限次元積分の無限次元的極限として定義することが可能である（この方向での初期の研究として，いま引用した R. Cameron の論文および R. Cameron, *J. Analyse Math.* **10** (1962/63), 287–361 がある)．本書，第 4 章の「ノート」も参照．

を有していることが必要である[5]：ルベーグ積分論，位相空間論，関数解析学，量子数理物理学．

量子数理物理学における汎関数積分法の主眼は，数理物理学的に興味のある量や対象に対して，汎関数積分による表示──汎関数積分表示──を数学的に厳密な仕方で導出し，これを用いて，考察下の量子系が有するより詳細な性質や構造を明らかにすることである．この方法が，強力でありうることは，有限次元空間上の解析学において積分表示が有用でありうるのと同断である．ただし，汎関数積分表示から何らかの具体的な帰結を導くには，その汎関数積分を精密に評価することが必要になるが，この作業には，有限次元積分の場合にはない技術的困難が伴いうる．

本書が扱う汎関数積分論における基本的な概念的枠組みと術語は現代確率論から採られる．だが，本書は，前著──『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997)，『量子力学の数学的構造 I，II』(朝倉書店，1999) ──の続編の一つとして企画された本であるので，現代確率論については，予備知識を前提としなかった．それゆえ，本書は，まず，現代確率論の基礎的事項の論述から始まる（第 1 章，第 2 章）．だが，これらの章は，現代確率論全般を論じることが目的ではなく，本書の中心的主題の理論展開を理解する上で必要となる最小限度の確率論的内容を提示し，証明や解説を行うものである．

第 3 章からが本論である．第 3 章では，上述した純虚数時間における量子力学を抽象的・一般的な枠組みで論述する．この章は，他の章と独立に読むことが可能である．第 4 章と第 5 章では，有限自由度の正準交換関係のシュレーディンガー表現に基づく量子力学系に関わる汎関数積分法を扱い，第 6 章から第 9 章において無限自由度の量子力学の一範疇である量子場の理論における汎関数積分法を抽象的な水準と具象的な水準にわたって論じる．具象的なモデルでは，最も物理的現実性を有するものの一つである非相対論的量子電磁力学──電荷をもつ非相対論的量子的粒子と量子電磁場（輻射場）との相互作用を扱う理論──も取り上げた．

付録 A～D は，既述の予備知識を有する読者が他の文献を参照しなくても本書を読めるように，本文で援用する数学的諸事実を証明付きまたは証明なしで

[5] 順に，それぞれ，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1974，第 12 版)，竹之内脩，『トポロジー』(廣川書店，1973)，加藤敏夫，『位相解析』(共立出版，1967；復刊版，2001）または黒田成俊，『関数解析』(共立出版，1980)，新井朝雄・江沢　洋，『量子力学の数学的構造 I，II』(朝倉書店，1999) と同程度の内容．

採録した．なかでも付録Dは無限次元測度の存在に関する内容を有し，本書が対象とする汎関数積分論の数学的基礎となるものである．特に，無限次元測度の存在形式に関するより深い理解と洞察を促す意味もこめて，可分な無限次元実ヒルベルト空間あるいは実緩増加超関数の空間上の測度の存在定理（ミンロスの定理）の詳しい証明を与えた．

量子数理物理学の研究という観点からいえば，本書は，汎関数積分法をその中枢に据える研究領域の最前線へと至る道の入り口（あるいはそのまた入り口）まで読者を案内することを目的とする．本書は，あくまでも，数学的に厳密な汎関数積分法の序論的教科書（独習用）の一つであることを意図して書かれたものであって，専門研究書であることを目指すものではない．この方針に基づいて，諸々の補題，命題，定理の証明は，かなり詳細にわたって叙述した（ただし，例外もありうる）．また，提示される数学的諸事実については，最も一般的な形をとっていないものもある．同様の理由により，各章の終わりに掲げた関連図書（参考文献）は網羅的であることを避け，原著論文も最小限に留めた．

本書の原稿を読み，誤植などを指摘し，貴重なコメントを寄せてくれた佐々木格君（信州大学），鈴木章斗君（信州大学），松澤泰道君（北海道大学，日本学術振興会特別研究員DC）に感謝したい．なおも誤植や見落とし，あるいは思わぬ誤りがあるかもしれないが，それらは，もちろん，著者の責任である．

共立出版株式会社の吉村修司さんと三輪直美さんには，本書の出版に際して，いろいろとお世話になった．記して心から感謝の意を表したい．

2010年6月　札幌の寓居にて

新　井　朝　雄

記　号　表

若干の論理記号

記　号	意　味
$A := B$	A を B で定義する
$P \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} Q$	P を Q で定義する
$P \Longrightarrow Q$	P ならば Q
$P \Longleftrightarrow Q$	P と Q は同値
	(P であるための必要十分条件は Q)
$P(x), \forall x \in X$	集合 X のすべての元 x に対して $P(x)$ が成立
$P(x), x \in X$	同上

標準的記号

記　号	意　味
a.e.	ほとんどいたるところ (almost everywhere)
$\mathfrak{B}^d$	d 次元ユークリッド空間のボレル集合体
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\mathbb{C}^d$	$\mathbb{C}$ の d 個の直積集合
$C^m(\mathcal{O})$	ユークリッド空間の開集合 $\mathcal{O}$ 上の m 回連続微分可能な関数の全体
	($m \in \mathbb{N}$ または $m = \infty$)
$C_0(\mathcal{O})$	$\mathcal{O}$ 上の連続関数で $\mathcal{O}$ の中に有界な台をもつものの全体
$C_0^m(\mathcal{O})$	$\mathcal{O}$ 上の m 回連続微分可能な関数で $\mathcal{O}$ の中に有界な台をもつものの全体
μ-a.e.	測度 μ に関してほとんどいたるところ
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\emptyset$	空集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{R}^d$	$\mathbb{R}$ の d 個の直積集合
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間
χ_S	集合 S の定義関数
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Z}_+$	非負整数の全体 $\{0\} \cup \mathbb{N}$

ヒルベルト空間論に関わる標準的な記号

A はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素を表す．$\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}$ の部分集合とする．

記号	意味
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内積（第1変数について反線形，第2変数について線形）
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$	$\mathcal{H}$ の内積
$\\|\cdot\\|$	ノルム
$\\|\cdot\\|_{\mathcal{H}}$	$\mathcal{H}$ のノルム
$\hat{\otimes}$	代数的テンソル積
$\otimes$	テンソル積
$\oplus$	直和
$\bar{A}$	可閉作用素 A の閉包
A^*	A の共役作用素（A の定義域が $\mathcal{H}$ で稠密な場合）
$A\|\mathcal{D}$	A の $\mathcal{D}$（A の定義域に含まれる部分空間）への制限
$[A,B]$	線形作用素 A と B の交換子：$[A,B]:=AB-BA$
$\\|B\\|$	有界線形作用素 B の作用素ノルム
$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 全体を定義域とする $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合
$\mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$	$\mathcal{H}$ 全体を定義域とする，$\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への有界線形作用素全体の集合
CONS	完全正規直交系 (complete orthonormal system)
$\bar{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D}$ の閉包
$D(A)$	A の定義域
$\mathcal{D}^{\perp}$	$\mathcal{D}$ の直交補空間
$\dim\mathcal{M}$	部分空間 $\mathcal{M}$ の次元
E_A	自己共役作用素 A のスペクトル測度
$\mathcal{F}_d$	$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換
$\ker A$	A の核: $\ker A:=\{\psi\in D(A)\mid A\psi=0\}$
$\mathcal{L}(\mathcal{D})$	$\mathcal{D}$ によって生成される部分空間
$L^2(X,d\mu)$	測度空間 (X,μ) 上の2乗可積分関数の同値類から生成されるヒルベルト空間
$\mathrm{Ran}\,(A)$	A の値域
$\rho(A)$	A のレゾルヴェント集合
$\sigma(A):=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$	A のスペクトル
$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$	A の点スペクトル（A の固有値の全体）
Tr	トレース

文　字　表

ギリシャ文字一覧表

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	クシー，グザイ
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π, ϖ	パイ
E	ϵ, ε	エプシロン，イプシロン	P	ρ, ϱ	ロー
Z	ζ	ゼータ，ジータ	Σ	σ, ς	シグマ
H	η	イータ，エータ	T	τ	タウ
Θ	θ, ϑ	シータ，テータ	Υ	υ	ユプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ，フィー
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ，プシー
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

ドイツ文字一覧表

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	アー　(a)	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	エヌ　(n)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	ベー　(b)	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	オー　(o)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	ツェー　(c)	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	ペー　(p)
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	デー　(d)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	クー　(q)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	エー　(e)	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	エール　(r)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	エフ　(f)	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	エス　(s)
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	ゲー　(g)	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	テー　(t)
$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	ハー　(h)	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	ウー　(u)
$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	イー　(i)	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	ファウ　(v)
$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	ヨット　(j)	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	ヴェー　(w)
$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	カー　(k)	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	イクス　(x)
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	エル　(l)	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	エプシロン　(y)
$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	エム　(m)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	ツェット　(z)

筆記体文字（スクリプト文字）一覧表

A	$\mathcal{A}$	N	$\mathcal{N}$
B	$\mathcal{B}$	O	$\mathcal{O}$
C	$\mathcal{C}$	P	$\mathcal{P}$
D	$\mathcal{D}$	Q	$\mathcal{Q}$
E	$\mathcal{E}$	R	$\mathcal{R}$
F	$\mathcal{F}$	S	$\mathcal{S}$
G	$\mathcal{G}$	T	$\mathcal{T}$
H	$\mathcal{H}$	U	$\mathcal{U}$
I	$\mathcal{I}$	V	$\mathcal{V}$
J	$\mathcal{J}$	W	$\mathcal{W}$
K	$\mathcal{K}$	X	$\mathcal{X}$
L	$\mathcal{L}$	Y	$\mathcal{Y}$
M	$\mathcal{M}$	Z	$\mathcal{Z}$

目　　次

第1章

確率空間論における基礎事項

1.1 はじめに

現象の中には，時間的に因果的な関係が十分よい精度で一意的であるとみなされる現象，すなわち，各時刻の現象状態が後の任意の時刻における現象状態をただ1つ定めるような現象——たとえば，古典力学や古典電磁気学が対象とする物理現象——とそうでない現象（時間発展的な記述が適さない現象も含む）がある．後者の型の現象であっても，そこに，前者の型の現象における法則性とは異なる別種の法則性が働いているとみなされるものが存在する．いわゆる確率事象ないし確率現象と呼ばれる現象はそのような現象の範疇の1つをなす．確率現象の理法を探究する数学的理論は確率論と呼ばれる．

確率論の歴史は，17世紀，偉大な思想家にして数学者・自然科学者でもあったパスカル（仏，1623〜1662）と数学者フェルマー（仏，1601〜1665）——「フェルマーの大定理」で有名——に遡るとされる．確率論は，この2人の先駆的業績以後，種々の歴史的な変遷を経ながら発展し，20世紀に至って，その普遍的本質，すなわち，個々の具象的な確率現象を統一的に包括する普遍的原理がコルモゴロフ（1933）によって，公理論的な形式で明るみに出された．現代確率論はこの形式にその基礎を置くものである．それは，純数学的には，有界測度空間上の関数解析学の一範疇とみなすことができる．

本章の目的は，本書の主題である量子数理物理学における汎関数積分法の入門的水準を論述するのに必要な範囲に限定して，現代確率論の基礎となる抽象

的確率空間論の基礎事項を提示することである．このため，現代確率論の本ならば当然取り上げるべき重要な事項でも省略したものがある[1]．

1.2　確率空間

まず，確率空間の概念へと至る発見法的な議論の1つをしておこう．確率現象においては，その現象のすべての可能な結果の全体が想定される．そこで，これを1つの集合として捉え，Ω と記す[2]．簡単のため，Ω は有限集合であるとしよう．このとき，各部分集合 $A \subset \Omega$ に対して，A に属する結果のいずれかが実現する確率が定まるとし，これを $P(A)$ と記す．したがって，$0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$ である．Ω の部分集合の全体を $\mathfrak{P}(\Omega)$ とすれば，これは Ω の部分集合からなる最大のボレル集合体である[3]．容易にわかるように，集合族 $\mathfrak{P}(\Omega)$ の元の個数は $2^{|\Omega|}$ である（$|\Omega|$ は Ω の元の個数）．$A_n \subset \Omega$（$n = 1, \cdots, N$；N は任意の自然数）かつ $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$ $(n, m = 1, \cdots, N)$ ならば，$\bigcup_{n=1}^N A_n$ に属する結果が実現される確率 $P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$ は（知られた例における経験則の一般化として）A_n に属する結果が実現される確率 $P(A_n)$ の和になっているべきであるから，$\sum_{n=1}^N P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$ が成立すべきである．これは，すなわち，P が可測空間 $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ 上の測度であるべきことを示唆する．Ω が無限集合の場合には，測度論でよく知られているように，Ω 上の測度は，Ω のすべての部分集合からなるボレル集合体上で定義されるとは限らない．そこで，一般の Ω については，Ω 上のボレル集合体 $\mathfrak{B}$ と $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の測度 P で $P(\Omega) = 1$ となるものがあって，この P によって，Ω に関わる確率事象の確率が記述されると考えるのが自然である．こうして，一般の確率現象を記述する基本的枠組みとして，測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ が定まる．以上が次の定義の背後にある描像の1つである：

---

[1] 本章は現代確率論を展開することを目的とするものではなく，汎関数積分論の叙述に際して必要な確率論的諸概念をあらかじめ用意するためのものである．測度論によらない初歩的な（いわば素朴な）確率論については既知として話を進める．

[2] たとえば，サイコロを投げる場合，出る目の数の可能な結果の全体は，$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であるので，この場合の Ω は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と同一視できる．

[3] 一般に，任意の空でない集合 X の部分集合からなる1つの集合族 $\mathfrak{B}$ が次の3つの条件を満たすとき，$\mathfrak{B}$ を X の**ボレル集合体**あるいは **σ 加法族**という（**完全加法族**，**可算加法族**と呼ぶ場合もある）：(i) $\emptyset$（空集合）$\in \mathfrak{B}$；(ii) $A \in \mathfrak{B} \Longrightarrow A^c \in \mathfrak{B}$（$A^c$ は A の補集合）；(iii) $A_n \in \mathfrak{B}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{B}$．(i)，(ii) から $X \in \mathfrak{B}$ である．X と $\mathfrak{B}$ の組 $(X, \mathfrak{B})$ は**可測空間**と呼ばれる．

【定義 1.1】 Ω を空でない集合とし，$\mathfrak{B}$ を Ω の部分集合からなる 1 つのボレル集合体（σ 加法族）とする．可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の測度 P が次の 2 つの条件 (P.1), (P.2) を満たすとき，P を $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の**確率測度** (probability measure) または**確率分布** (probability distribution) と呼ぶ：

(P.1) すべての $A \in \mathfrak{B}$ に対して，$0 \leq P(A) \leq 1$.
(P.2) $P(\Omega) = 1$.

三つ組 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を**確率空間** (probability space) という．この場合，Ω を**基礎空間** (basic space) または**標本空間** (sample space)，Ω の各元 ω を**素事象**または**根元事象** (elementary event) と呼ぶ[4].

測度論的にいえば，確率測度というのは，要するに全測度が 1 の測度のことであり，そのような測度が与えられた測度空間が確率空間である．

✳ **注意 1.2** 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$——X は空でない集合，$\mathfrak{B}$ は X の部分集合からなる 1 つのボレル集合体，μ は可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ 上の測度——において，全測度が有限，すなわち，$0 < \mu(X) < \infty$ のとき（このような測度は**有限測度**と呼ばれる），$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ は**有限測度空間** (finite measure space) または**有界測度空間**と呼ばれる．この場合，$\widetilde{\mu}(A) := \mu(A)/\mu(X)$ によって定義される写像 $\widetilde{\mu} : \mathfrak{B} \to [0, \infty)$ は $(X, \mathfrak{B})$ 上の確率測度であり，$(X, \mathfrak{B}, \widetilde{\mu})$ は確率空間である[5]．したがって，確率空間を考えることと有限測度空間を考えることは本質的に同じである．

■ **例 1.3** d を任意の自然数とし，Ω が d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{R}$ (実数全体)，$j = 1, 2, \cdots, d\}$ の場合を考え，$\mathfrak{B}^d$ を d 次元ボレル集合体，すなわち，$\mathbb{R}^d$ の開集合全体を含む最小の σ 加法族とする．各ベクトル $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，その大きさ（長さ，絶対値）を $|x|$ によって表す：

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}. \tag{1.1}$$

可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上のルベーグ測度，すなわち，d 次元ルベーグ測度を $\mu_{\mathrm{L}}^{(d)}$ で表わし，$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ可測関数 f に対して，$\mu_L^{(d)}$ による積分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_L^{(d)}(x)$ を単に $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$ と記す．この記法に付随して，しばしば「ルベーグ測度 dx」という言い方もする．

---

[4] **標本点**または**見本点** (sample point) ともいう．
[5]「$A := B$」は A を B によって定義することを表す記法．

積分公式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \tag{1.2}$$

を用いると，各 $a > 0$ と $m = (m_1, \cdots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\mu_{a,m}(B) := \frac{\int_B e^{-\frac{|x-m|^2}{2a}} dx}{\left(\sqrt{2\pi a}\right)^d}, \quad B \in \mathfrak{B}^d \tag{1.3}$$

によって定義される写像 $\mu_{a,m} : \mathfrak{B}^d \to [0, \infty)$ は可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の確率測度であることがわかる．この型の確率測度を $\mathbb{R}^d$ 上の**ガウス型確率測度**，**ガウス分布**または**正規分布**と呼ぶ．

例 1.3 に関連して，以下でしばしば用いるある一般概念と記号を導入しておく．

一般に，可測空間 (M, Σ) (i.e. M は空でない集合，Σ は M の部分集合からなる 1 つの σ 加法族) の上の 2 つの測度 μ, ν が「$E \in \Sigma$, $\nu(E) = 0 \Longrightarrow \mu(E) = 0$」を満たすとき，$\mu$ は ν に関して**絶対連続** (absolutely continuous) であるという．

(M, Σ, ν) 上の非負の可積分関数 f が存在して

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\nu(x), \quad \forall E \in \Sigma \tag{1.4}$$

が成り立つならば，明らかに，μ は ν に関して絶対連続である．式 (1.4) が成り立つことを記号的に

$$d\mu = f(x)\, d\nu \tag{1.5}$$

のように表す．この場合，f を μ の ν に関する**ラドン–ニコディム密度関数**という[6]．

■**例 1.4**　式 (1.3) は次のことを語る：$\mu_{a,m}$ は d 次元ルベーグ測度 dx について絶対連続であり，そのラドン–ニコディム密度関数は $e^{-\frac{|x-m|^2}{2a}} / \left(\sqrt{2\pi a}\right)^d$ である．すなわち

$$d\mu_{a,m} = \frac{e^{-\frac{|x-m|^2}{2a}}}{\left(\sqrt{2\pi a}\right)^d} dx.$$

---

[6] 実は次の定理がある：【**ラドン–ニコディムの定理**】(M, Σ, ν) は σ 有限な測度空間とする (i.e. 部分集合 $M_n \in \Sigma$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で $\nu(M_n) < \infty$ かつ $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ となるものが存在)．また，(M, Σ) 上の有限測度 μ は ν に関して絶対連続であるとする．このとき，(M, Σ, ν) 上の可積分関数 f が存在して，$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\nu(x)$, $\forall E \in \Sigma$ が成り立つ．

この定理の証明については，たとえば，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1974 (第 12 版)) の定理 18.4 を参照されたい．

1.3 確率変数

次に確率空間上の関数の1つの部類を導入する．

【定義 1.5】 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を確率空間とする．Ω 上の $\mathfrak{B}$-可測な関数 $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; $\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$（実数または $\pm\infty$ の値をとる $\mathfrak{B}$-可測な関数）で P に関してほとんどいたるところ（P-a.e.）有限なものを $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の**確率変数**（random variable）という[7]．

X を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数とする．このとき，各 $B \in \mathfrak{B}^1$ に対する X の原像

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \tag{1.6}$$

は $\mathfrak{B}$ の元であるので

$$P^X(B) := P(X^{-1}(B)) \tag{1.7}$$

を定義することができる．

【命題 1.6】 対応 $P^X : \mathfrak{B}^1 \ni B \mapsto P^X(B)$ は $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ 上の確率測度である．

証明 明らかに，$0 \leq P^X(B) \leq P^X(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathfrak{B}^1$ かつ $P^X(\emptyset) = 0$．関数 X は P に関して a.e. 有限であるから，$P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$．したがって，$0 \leq P^X(B) \leq 1$, $\forall B \in \mathfrak{B}^1$．$P^X$ の完全加法性は，P の完全加法性と $X^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = \bigcup_{n=1}^\infty X^{-1}(B_n)$, $B_n \in \mathfrak{B}^1$ から導かれる． ■

命題 1.6 によって，$P^X(B)$ を X の値が B に属する確率と解釈することが可能である．特に，X の値が特定の値 $a \in \mathbb{R}$ をとる確率は $P^X(\{a\})$ である．また，Ω 上の定値関数 $X(\omega) = c$ (P-a.e.ω) に対しては，$P^X(\{c\}) = 1$, $P^X(\mathbb{R} \setminus \{c\}) = 0$ であるので，確率1で値 c が実現されると解釈される．

いま述べた解釈に呼応する形で，$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ 上の確率測度 P^X を確率変数 X の**分布**と呼ぶ．

■**例 1.7** μ を可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の確率測度としよう（たとえば，例 1.3）．$\mathbb{R}^d$ 上の非負のボレル可測関数 ρ が存在して

[7] 一般に，測度 μ に対して，「μ-a.e.」は「測度 μ に関してほとんどいたるところ」を表す．

$$d\mu = \rho(x)\,dx$$

が成り立つならば（したがって，μ は d 次元ルベーグ測度 dx に関して絶対連続），ρ を確率測度 μ の**確率密度関数**という．この場合，μ は確率密度関数 ρ をもつという．$\mu(\mathbb{R}^d) = 1 < \infty$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$$

が成り立つ．

例 1.3 の確率測度 $\mu_{a,m}$ は確率密度関数 $e^{-|x-m|^2/2a}/(\sqrt{2\pi a})^d$ をもつ．

各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，写像 $X_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $X_j(x) := x_j, x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ によって定義すれば，X_j は $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d, \mu)$ 上の確率変数である．$\mathbb{R}$ 上の関数 ρ_j を

$$\rho_j(x_j) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \rho(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_d)\,dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_d, \quad x_j \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

によって定義する．ただし，右辺は x_j 以外の変数に関するルベーグ積分を表す（$d = 1$ の場合は，$\rho_1(x_1) := \rho(x_1)$ とする）．このとき

$$\mu^{X_j}(B) = \int_B \rho_j(t)\,dt$$

となる．したがって

$$\int_{\mathbb{R}^d} X_j(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} t\rho_j(t)\,dt.$$

ここで，一般のルベーグ積分に関する積分変数の変換公式（付録 A，定理 A.2）を用いた．

確率変数に関する次の事実――一種の変数変換公式―は基本的である[8]：

【定理 1.8】　X を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の各ボレル可測関数 f に対して，積分 $\int_\Omega f(X(\omega))\,dP(\omega)$，$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP^X(x)$ のいずれか一方が存在すれば，他方も存在し

$$\int_\Omega f(X(\omega))\,dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP^X(x) \tag{1.9}$$

が成り立つ．

---

[8] 証明については，拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）の付録 B の定理 B.2 を参照．

命題 1.6 と定理 1.8 は一般化される．M を任意の空でない集合とし写像 $F:\Omega\to M$ が与えられたとする．$\{A\subset M \mid F^{-1}(A)\in\mathfrak{B}\}$ を含む最小の σ 加法族を $\mathfrak{B}^F$ とする．任意の $A\in\mathfrak{B}^F$ に対して，非負の実数 $P^F(A)$ を

$$P^F(A) := P(F^{-1}(A)) = P(\{\omega\in\Omega \mid F(\omega)\in A\}) \tag{1.10}$$

によって定義できる．

【定理 1.9】　M, F, $\mathfrak{B}^F$, P^F を上述のものとする．

(i) P^F は可測空間 $(M,\mathfrak{B}^F)$ 上の確率測度である．
(ii) M 上の任意の $\mathfrak{B}^F$ 可測関数 f に対して，積分 $\int_\Omega f(F(\omega))\,dP(\omega)$, $\int_M f(x)\,dP^F(x)$ のいずれか一方が存在すれば，他方も存在し

$$\int_\Omega f(F(\omega))\,dP = \int_M f(x)\,dP^F(x) \tag{1.11}$$

が成り立つ．

証明　(i) 命題 1.6 の証明と同様．
(ii) 定理 1.8 の証明と同様．　■

測度 P^F は P の F による**像測度** (image measure) と呼ばれる．定理 1.9 が語る構造は，1 つの確率空間が与えられたとき，任意の別の集合上に確率測度を導入するために応用することができる．

確率変数に関するいくつかの量を定義しよう．$(\Omega,\mathfrak{B},P)$ を確率空間，X をこの確率空間上の確率変数とする．X が P について可積分であるとき

$$\mathrm{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) \tag{1.12}$$

によって定義される量 $\mathrm{E}[X]$ を X の**平均**または**期待値**と呼ぶ．定理 1.8 を $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ の場合に応用すれば

$$\mathrm{E}[X] = \int_\mathbb{R} x\,dP^X(x) \tag{1.13}$$

が得られる．この式と既述の P^X の解釈から，$\mathrm{E}[X]$ の呼称に対する "正当性" が了解されよう．

記号上の問題にすぎないが，X の期待値を $\langle X\rangle$ と記す場合もある：

$$\langle X\rangle := \mathrm{E}[X]. \tag{1.14}$$

一般に，実定数 c と自然数 p に対して，Ω 上の関数 $(X-c)^p$——これも $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数の 1 つである——が P について可積分であるとき，この確率変数の平均

$$\mathrm{E}[(X-c)^p] = \int_\Omega (X(\omega)-c)^p\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (x-c)^p\, dP^X(x) \tag{1.15}$$

を X の点 c のまわりの $\boldsymbol{p}$ **次積率**（moment）または $\boldsymbol{p}$ **次モーメント**という．特に，$c=\mathrm{E}[X]$, $p=2$ の場合の積率

$$\mathrm{V}(X) := \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2] \tag{1.16}$$

を X の**分散** (variance) という．これは X の平均のまわりの値分布の広がりを表す基本的な量の 1 つである．分散の平方根 $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ を X の**標準偏差** (standard deviation) と呼ぶ．

1.4　イエンゼンの不等式

ここで，先に進む前に，確率論でよく使用する不等式の 1 つを証明しておく．

【補題 1.10】　f を $\mathbb{R}$ 上の凸関数とする（i.e. 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ と $t\in[0,1]$ に対して，$f(tx_1+(1-t)x_2) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ が成り立つ）．このとき，各 $a\in\mathbb{R}$ に対して，定数 M があって

$$f(x)-f(a) \ge M(x-a), \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{1.17}$$

が成り立つ．

証明　関数 $F(x) := [f(x)-f(a)]/(x-a)$, $x\in\mathbb{R}$, $x\ne a$ を考える．まず，F は単調増加関数であることを示そう．$a<x<y$ とすれば $F(x)\le F(y)$ は

$$f(x) \le \left(1-\frac{x-a}{y-a}\right)f(a) + \frac{x-a}{y-a}f(y)$$

と同値である．だが，後者は，f の凸性により成立する．したがって，F は (a,∞) で単調増加である．

次に $x<a<y$ のときは，f の凸性により

$$f(a) \leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \left(1-\frac{y-a}{y-x}\right)f(y)$$

が成立する．だが，これは $F(x) \leq F(y)$ と同値である．

$x<y<a$ の場合も上と同様にして，$F(x) \leq F(y)$ が示される．

$\mathbb{R}\setminus\{a\}$ における F の単調増加性により

$$F(a-0) \leq M \leq F(a+0)$$

を満たす定数 M がある．したがって，$x>a$ ならば $F(x) \geq F(a+0) \geq M$ であるから，$f(x)-f(a) \geq M(x-a)$．また，$x<a$ ならば，$F(x) \leq F(a-0) \leq M$ であるから，$f(x)-f(a) \geq M(x-a)$（$x-a<0$ に注意）． ∎

【定理 1.11】（イエンゼン (Jensen) の不等式） X を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数とし，P について可積分であるとする．$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をボレル可測な凸関数とする．このとき

$$f(\mathrm{E}[X]) \leq \mathrm{E}[f(X)]. \tag{1.18}$$

ただし，$\mathrm{E}[f(X)]=+\infty$ の場合も含む（しかし，この場合，(1.18) は自明な不等式になる）．

証明 (1.17) において，$a=\mathrm{E}[X]$ とすれば $f(X) \geq f(\mathrm{E}[X]) + M(X-\mathrm{E}[X])$．そこで，両辺の期待値をとれば $\mathrm{E}[f(X)] \geq f(\mathrm{E}[X])$ が得られる． ∎

■**例 1.12** $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な実数値関数 f が凸であるための必要十分条件は $f''(x) \geq 0,\ x\in\mathbb{R}$ である[9]．したがって，この場合，(1.18) が成り立つ．

- 具体例

$f(x)=e^{ax}$, $x\in\mathbb{R}$（$a\in\mathbb{R}$ は定数）によって定義される関数 f は凸である．したがって

$$e^{a\int_\Omega X dP} \leq \int_\Omega e^{aX}\,dP.$$

---

[9] たとえば，黒田成俊，『微分積分』（共立出版，2002）の p.199，系 6.1 を参照．

1.5　ガウス型確率変数

確率現象において基本的で重要な役割を演じる確率変数の1つのクラスを導入し，いくつかの性質を見ておく．

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数 X の分布 P^X がガウス型であるとき，すなわち，$a > 0,\ m \in \mathbb{R}$ を定数として

$$P^X(B) = \int_B \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}}\,dx, \quad B \in \mathfrak{B}^1 \tag{1.19}$$

が成り立つとき，X を**ガウス型確率変数**と呼ぶ．

定理 1.8 と 1 次元ルベーグ測度に関する変数変換 $y = (x-m)/\sqrt{2a}$ によって

$$\mathrm{E}[X] = m, \tag{1.20}$$

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = a \tag{1.21}$$

がわかる．つまり，定数 m は X の平均であり，a は X の分散である．したがって，$\sqrt{a}$ は X の標準偏差を表す．そこで，(1.19) を満たす確率変数 X を**平均 m，分散 a のガウス型確率変数**と呼び，X は，平均 m，分散 a の**ガウス分布**または**正規分布**にしたがうという．$m = 0,\ a = 1$ の場合のガウス分布を**規準ガウス分布**または**規準正規分布**と呼ぶ．

変数変換 $y = (x-m)/\sqrt{2a}$ とルベーグの優収束定理を用いることにより，$\mathbb{R}$ 上の任意の多項式的に有界な連続関数 f に対して

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}} = f(m)$$

が成り立つことがわかる．したがって，特に，超関数の意味で

$$\lim_{a \to 0} \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}} = \delta(x-m) \quad (1\text{ 次元デルタ超関数}).$$

そこで，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 P_m を

$$P_m(B) := \begin{cases} 1 & ; B = \{m\} \\ 0 & ; m \notin B \end{cases}$$

によって定義し―P_m は点 m に質量 1 をもつ**デルタ測度**と呼ばれる（象徴的に $dP_m(x) = \delta(x-m)\,dx$ または $P_m(B) = \int_B \delta(x-m)\,dx$ と書かれる）―，便宜上，P_m を分布とする確率変数 X_m を**平均 m，分散 0 のガウス型確率変数**と呼ぶ．容易にわかるように，$X_m = m$ (P-a.e.) である．

次の事実は容易にわかる：X が平均 m，分散 a のガウス型確率変数ならば，$X - m$ は平均 0，分散 a のガウス型確率変数である．逆に，Y が平均 0，分散 a のガウス型確率変数ならば，$Y + m$ は平均 m，分散 a のガウス型確率変数である．したがって，ガウス型確率変数については，基本的に，平均が 0 のものを考えれば十分である．

次の命題は，ガウス型確率変数に特徴的な性質の 1 つである：

【命題 1.13】　X が平均 0，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数ならば，任意の $p > 0$ に対して

$$\mathrm{E}[|X|^p] = c_p a^{p/2}. \tag{1.22}$$

ただし，$c_p > 0$ は a によらない定数で，具体的には

$$c_p = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} |y|^p e^{-y^2}\,dy \tag{1.23}$$

で与えられる．

証明　$\mathrm{E}[|X|^p] = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a}\,dx$ と変数変換 $y = x/\sqrt{2a}$ による．■

【定理 1.14】　X を平均 0，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数とする．

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{E}[X^{2n-1}] = 0, \tag{1.24}$$

$$\mathrm{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} a^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \mathrm{E}[X^2]^n. \tag{1.25}$$

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$（複素数全体）に対して，$e^{|z||X|}$ は可積分であり

$$\mathrm{E}[e^{zX}] = e^{z^2 a/2} \tag{1.26}$$

が成り立つ．

証明 (i) 任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{E}[X^\ell] = \int_{\mathbb{R}} x^\ell \frac{e^{-\frac{x^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}}\,dx$$

である．したがって，ℓ が奇数ならば被積分関数は奇関数なので，$\mathrm{E}[X^\ell] = 0$ となる．ゆえに (1.24) が成り立つ．$\ell = 2n$ のときは，(1.22) により

$$\mathrm{E}[X^{2n}] = c_{2n}a^n.$$

一方

$$c_{2n} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} I_n, \quad I_n := \int_{\mathbb{R}} y^{2n}\, e^{-y^2}\,dy$$

である．部分積分により示される漸化式

$$I_n = \frac{(2n-1)}{2} I_{n-1}$$

に注意すれば

$$I_n = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 n!}\sqrt{\pi}$$

となる．したがって，(1.25) が成立する．

(ii) $N \in \mathbb{N}$ に対して，$f_N := \sum_{n=0}^N z^n X^n/n!$ とおけば，$\lim_{N\to\infty} f_N = e^{zX}$ (P-a.e.)．$|f_N| \le e^{|z||X|}$ であり

$$\mathrm{E}\left[e^{|z||X|}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{|z|x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}}\,dx < \infty.$$

したがって，e^{zX} は可積分であり，ルベーグの優収束定理により

$$\mathrm{E}\left[e^{zX}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{E}[X^n].$$

(i) の結果により，右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mathrm{E}[X^{2n}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} a^n = e^{z^2 a/2}$$

となる．ゆえに (1.26) が成立する．　■

1.6 確率ベクトル

通常の変数の場合と同様に，確率変数についても複数個扱うことが可能であり，このほうがより一般的である．確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の d 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_d$ の組 $X = (X_1, \cdots, X_d) = (X_i)_{i=1}^d$ によって定義される写像 $X : \Omega \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^d$;

$$X(\omega) := (X_1(\omega), \cdots, X_d(\omega)), \quad \omega \in \Omega \tag{1.27}$$

を $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の **d 次元確率ベクトル**という[10].

1 個の確率変数の場合の一般化として，$\mathbb{R}^d$ の各ボレル可測集合 $B \in \mathfrak{B}^d$ に対して非負の実数 $P^X(B)$ を

$$P^X(B) := P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_d(\omega)) \in B\}) \tag{1.28}$$

によって定義すれば，対応 $P^X : \mathfrak{B}^d \to [0, \infty)$；$B \mapsto P^X(B)$ は $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の確率測度であることがわかる（証明は，1 確率変数の場合と同様）．確率測度 P^X を確率ベクトル X の**同時分布**（simultaneous distribution）または**結合分布**（joint distribution）あるいは単に**分布**と呼ぶ.

定理 1.8 と同様にして，次の定理が証明される：

【定理 1.15】 X を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の d 次元確率ベクトルとする．このとき，$\mathbb{R}^d$ 上の各ボレル可測関数 f に対して，積分 $\int_\Omega f(X(\omega))\, dP(\omega)$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dP^X(x)$ のいずれか一方が存在すれば，他方も存在し

$$\int_\Omega f(X(\omega))\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dP^X(x) \tag{1.29}$$

が成り立つ.

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率ベクトル $X = (X_1, \cdots, X_n)$ については

$$\mathrm{E}[X] := (\mathrm{E}[X_1], \cdots, \mathrm{E}[X_n]) \tag{1.30}$$

によって定義される n 次元実ベクトルを確率ベクトル X の**平均ベクトル**または単に**平均**という.

---

[10] 文脈から誤解のおそれがない場合には，単に**確率ベクトル**ともいう.

便宜上，用語法を拡張して，$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の任意の複素数値可積分関数 F に対して，$\int_\Omega F\,dP$ を F の P に関する期待値と呼び，これを $\langle F\rangle$ または $\mathrm{E}[F]$ で表す．

確率変数の積率の概念は，確率ベクトルに拡張される．$X = (X_i)_{i=1}^d$ を $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率ベクトルとしよう．非負整数 p_i $(i = 1, \cdots, d)$ と $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^d$ に対して，確率変数 $(X_1 - c_1)^{p_1}(X_2 - c_2)^{p_2} \cdots (X_d - c_d)^{p_d}$ の平均

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(X_1 - c_1)^{p_1}(X_2 - c_2)^{p_2} \cdots (X_d - c_d)^{p_d}]\\&= \int_{\mathbb{R}^d} (x_1 - c_1)^{p_1} \cdots (x_d - c_d)^{p_d} dP^X(x)\end{aligned} \tag{1.31}$$

を考えることができる．ただし，$(X_1 - c_1)^{p_1}(X_2 - c_2)^{p_2} \cdots (X_d - c_d)^{p_d}$ は P に関して可積分であるとする．この型の量を確率ベクトル X の $(\boldsymbol{p_1} + \cdots + \boldsymbol{p_d})$ **次積率**という．特に

$$\sigma_{jk} := \mathrm{E}[(X_j - \mathrm{E}[X_j])(X_k - \mathrm{E}[X_k])] \tag{1.32}$$

を X_j と X_k の**共分散** (covariance) といい，これを (j, k) 成分とする d 次の行列 $(\sigma_{jk})_{j,k=1,\cdots,d}$ を**分散–共分散行列** (variance-covariance matrix) と呼ぶ．

1.7　確率ベクトルの独立性

複数の確率ベクトルが与えられたとき，これらの関係を考察するための基本となる重要な概念を導入する．

【定義 1.16】　$d, n \in \mathbb{N}$（自然数全体）とする．確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の n 個の d 次元確率ベクトルの系（集合）$\{X_k \mid k = 1, \cdots, n\}$ が，任意の $B_k \in \mathfrak{B}^d$ $(k = 1, \cdots, n)$ に対して

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n X_k^{-1}(B_k)\right) = \prod_{k=1}^n P\left(X_k^{-1}(B_k)\right) \tag{1.33}$$

を満たすとき，$\{X_k \mid k = 1, \cdots, n\}$ は**独立**であるという．この場合，n 個の確率ベクトル $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は**互いに独立**であるという．

式 (1.33) の確率論的意味は「確率ベクトル X_k の値が B_k に属する事象が同

時に起こる確率が各 X_k の値が B_k に属する確率の積で与えられる」ということである．この背後にある直観的描像は，確率ベクトル $X_1, \cdots, X_n$ によって表される確率事象が互いに無関係であるというものである．

一般に，空でない集合 Λ を添え字にもつ d 次元確率ベクトルの集合 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に属する任意の有限個の確率ベクトル $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \Lambda$ $(j = 1, \cdots, n)$ は任意）が独立であるとき，$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は**独立**であるという．

【定理 1.17】 $X_1, \cdots, X_n$ を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の d 次元確率ベクトルとする．

(i) $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立ならば，$\mathbb{R}^d$ 上の任意の実数値ボレル可測関数 $f_1, \cdots, f_n$ に対して，$f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ も互いに独立である．

(ii) $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は，dn 次元確率ベクトル $X = (X_1, \cdots, X_n)$ の分布が X_k の分布 P^{X_k} $(k = 1, \cdots, n)$ の直積測度 $P^{X_1} \otimes \cdots \otimes P^{X_n}$ に等しいことである：

$$P^X = P^{X_1} \otimes \cdots \otimes P^{X_n}. \tag{1.34}$$

証明 (i) 次の式変形による：任意の $B_k \in \mathfrak{B}^1$ に対して

$$\begin{aligned}
&P(\{\omega \in \Omega \mid f_k(X_k(\omega)) \in B_k,\ k = 1, \cdots, n\}) \\
&\quad = P(\{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in f_k^{-1}(B_k),\ k = 1, \cdots, n\}) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in f_k^{-1}(B_k)\}) \quad (\because X_1, \cdots, X_n \text{ の独立性}) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega \mid f_k(X_k(\omega)) \in B_k\}).
\end{aligned}$$

(ii) （必要性）$X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとしよう．このとき，(1.33) によって，任意の $B_k \in \mathfrak{B}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
P^{X_1, \cdots, X_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) &= P^{X_1}(B_1) \cdots P^{X_n}(B_n) \\
&= (P^{X_1} \otimes \cdots \otimes P^{X_n})(B_1 \times \cdots \times B_n).
\end{aligned}$$

したがって，ホップの拡張定理の一意性により，(1.34) が成り立つ．

（十分性）明らか． ∎

【定理 1.18】 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の n 個の d 次元確率ベクトル $X_1, \cdots, X_n$ が独立ならば，任意の $k = 1, \cdots, n-1$ と $f : (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}$ と $g : (\mathbb{R}^d)^{n-k} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\langle f(X_1, \cdots X_k) g(X_{k+1}, \cdots, X_n)\rangle = \langle f(X_1, \cdots, X_k)\rangle \langle g(X_{k+1}, \cdots, X_n)\rangle .$$

ただし，$f(X_1, \cdots X_k) g(X_{k+1}, \cdots, X_n)$ は P について可積分であるとする．

証明 次の計算による：

$$\begin{aligned}
&\langle f(X_1, \cdots X_k) g(X_{k+1}, \cdots, X_n)\rangle \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1, \cdots, x_k) g(x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dP^{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1, \cdots, x_k) g(x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dP^{X_1}(x_1) \cdots dP^{X_n}(x_n) \\
&\hspace{20em} (\because \text{独立性}) \\
&= \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(x_1, \cdots, x_k) dP^{X_1}(x_1) \cdots dP^{X_k}(x_k) \right) \\
&\quad \times \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-k}} g(x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dP^{X_{k+1}}(x_{k+1}) \cdots dP^{X_n}(x_n) \right) \\
&= \langle f(X_1, \cdots, X_k)\rangle \langle g(X_{k+1}, \cdots, X_n)\rangle .
\end{aligned}$$

■

1.8　特性関数

この節では，確率ベクトルの積率をまとめて統一的に考察するための有用な数学的対象を定義する．

以下，$\mathbb{R}^d$ の任意の元 $x = (x_1, \cdots, x_d), y = (y_1, \cdots, y_d)$ のユークリッド内積を $x \cdot y$ または xy で表す：

$$x \cdot y = xy = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j . \tag{1.35}$$

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を確率空間とする．この確率空間上の確率ベクトル $X = (X_1, \cdots, X_d)$ と $k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，確率変数 $k \cdot X$（または kX と記す）を

$$k \cdot X = kX := \sum_{j=1}^{d} k_j X_j$$

$$\text{(i.e. } (kX)(\omega) := k \cdot X(\omega) = \textstyle\sum_{j=1}^{d} k_j X_j(\omega),\ \omega \in \Omega) \tag{1.36}$$

によって定義する．この確率変数から定まる，$\mathbb{R}^d$ 上の関数

$$C_X(k) := \mathrm{E}\left[e^{ikX}\right] \tag{1.37}$$

$$= \int_\Omega e^{ikX(\omega)}\, dP(\omega), \quad k \in \mathbb{R}^d \tag{1.38}$$

を X の**特性関数** (characteristic function) という[11]．定理 1.15 によって

$$C_X(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\, dP^X(x) \tag{1.39}$$

と書ける．

特性関数の基本的な性質は次の定理にまとめられる：

【定理 1.19】

(i) $$C_X(0) = 1.$$

(ii)（有界性） $$|C_X(k)| \le 1,\ \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

(iii)（共役性） $$C_X(k)^* = C_X(-k),\ \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

ただし，複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，z^* は z の共役複素数を表す．

(iv) $$\lim_{k\to 0} C_X(k) = 1.$$

(v)（一様連続性）

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^d} |C_X(k+h) - C_X(k)| \le \sqrt{2(1 - \mathrm{Re}\, C_X(h))}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d. \tag{1.40}$$

ただし，複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を表す．特に

$$\lim_{h\to 0} \sup_{k\in\mathbb{R}^d} |C_X(k+h) - C_X(k)| = 0. \tag{1.41}$$

(vi) すべての $N \in \mathbb{N}$ と任意の $k_n \in \mathbb{R}^d$, $z_n \in \mathbb{C}$ $(n = 1, \cdots, N)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^{N} C_X(k_n - k_m) z_n^* z_m \ge 0. \tag{1.42}$$

証明 (i) は明らかであろう．

[11] $|e^{ikX(\omega)}| = 1$ であるから，関数 e^{ikX} は P について可積分である．

(ii)
$$|C_X(k)| \le \int_\Omega |e^{ikX(\omega)}|\, dP(\omega) = \int_\Omega 1\, dP(\omega) = P(\Omega) = 1.$$

(iii) $(e^{ikX(\omega)})^* = e^{-ikX(\omega)}$ による.

(iv)
$$|C_X(k) - 1| \le \int_\Omega |e^{ikX(\omega)} - 1|\, dP(\omega).$$

一方，$|e^{ikX(\omega)} - 1| \le 2$ かつ $\lim_{k\to 0} |e^{ikX(\omega)} - 1| = 0$, P-a.e.ω. したがって，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{k\to 0} \int_\Omega |e^{ikX(\omega)} - 1|\, dP(\omega) = 0$. ゆえに題意が成立する.

(v) まず，

$$|C_X(k+h) - C_X(k)| \le \int_\Omega 1 \cdot \left| e^{ihX(\omega)} - 1 \right| \, dP(\omega).$$

右辺に，積分に関するシュヴァルツの不等式を適用すれば

$$|C_X(k+h) - C_X(k)| \le \left(\int_\Omega |e^{ihX(\omega)} - 1|^2\, dP(\omega) \right)^{1/2}$$

を得る．そこで

$$\begin{aligned}\int_\Omega |e^{ihX(\omega)} - 1|^2\, dP(\omega) &= 2 - \int_\Omega e^{ihX(\omega)}\, dP(\omega) - \int_\Omega e^{-ihX(\omega)}\, dP(\omega) \\ &= 2(1 - \mathrm{Re}\, C_X(h))\end{aligned}$$

に注意すれば (1.40) を得る．(1.41) は，(1.40) と (iv) による.

(vi) これは次の式変形による：

$$\sum_{n,m=1}^{N} C_X(k_n - k_m) z_n^* z_m = \int_\Omega \left| \sum_{n=1}^{N} z_n e^{-ik_n X(\omega)} \right|^2 dP(\omega) \ge 0. \qquad \blacksquare$$

1.9 特性関数による分布表示

前節において，確率ベクトル X の特性関数 C_X の基本的な性質を調べた．この節では，特性関数 C_X を用いて X の分布 P^X を表し，C_X が分布を一意的に決定することを証明する.

まず，関数空間論における記号を復習する．各 $p \ge 1$ に対して，測度空間 $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の p 乗可積分関数の全体を $L^p(M, \mathfrak{B}, d\mu)$ または $L^p(M, d\mu)$ で表

す[12]：

$$L^p(M,d\mu) := \left\{ f : M \to \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\} \;\middle|\; \int_M |f(m)|^p \, d\mu(m) < \infty \right\}. \tag{1.43}$$

ただし，この集合においては，$f = g$ $(f, g \in L^p(M,d\mu))$ は，$f(m) = g(m)$, μ-a.e.m を意味するものとする．$L^p(M,d\mu)$ の元 f の L^p ノルムを $\|f\|_{L^p(M,d\mu)}$ で表す：

$$\|f\|_{L^p(M,d\mu)} := \left(\int_M |f(m)|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{1.44}$$

ただし，どの測度空間の L^p ノルムであるかが文脈から明らかな場合は，$\|f\|_{L^p(M,d\mu)}$ を $\|f\|_p$ と記す場合もある．

また，M 上の μ に関して本質的に有界な関数の全体を $L^\infty(M,d\mu)$ で表し，$|f|$ の本質的上限を $\|f\|_\infty$ と記す：

$$\|f\|_\infty := \mathrm{ess.sup}_{x \in M} |f(x)|.$$

$L^p(\mathbb{R}^d) := L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d, dx)$ とする $(1 \le p \le \infty)$．

各 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} f(x) \, dx, \quad k \in \mathbb{R}^d \tag{1.45}$$

によって定義される関数 $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は f の**フーリエ変換**と呼ばれる．

フーリエ変換の概念は，次のようにして，測度論の文脈でも定義される．すなわち，μ を可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度とするとき

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} \, d\mu(x) \tag{1.46}$$

を μ の**フーリエ変換**という．

■**例 1.20** $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \ge 0$ に対して，$\mu(B) = (2\pi)^{-d/2} \int_B f(x) \, dx$, $B \in \mathfrak{B}^d$ とすれば，これは有界な測度であり，積分変数の変換公式により，μ のフーリエ変換は，f のフーリエ変換であることがわかる．

$\nu := \mu/\mu(\mathbb{R}^d)$ とすれば，ν は $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の確率測度であるから，

$$\hat{\mu}(k) = \mu(\mathbb{R}^d) C(-k)^{(\nu)} \tag{1.47}$$

---

[12] 前者はボレル集合体 $\mathfrak{B}$ を明示したい場合に用いる．

と書ける．ただし

$$C(k)^{(\nu)} := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\, d\nu(x). \tag{1.48}$$

この関数は確率空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d, \nu)$ 上の確率ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ の特性関数であるから，定理 1.19 から次の定理がただちに導かれる：

【定理 1.21】

(i) $$\hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d).$$

(ii)（有界性） $$|\hat{\mu}(k)| \le \mu(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

(iii)（共役性） $$\hat{\mu}(k)^* = \hat{\mu}(-k),\ \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

(iv) $$\lim_{k\to 0} \hat{\mu}(k) = \mu(\mathbb{R}^d).$$

(v)（一様連続性）

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(k+h) - \hat{\mu}(k)| \le \mu(\mathbb{R}^d)\sqrt{2\left(1 - \frac{\operatorname{Re}\hat{\mu}(h)}{\mu(\mathbb{R}^d)}\right)}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d. \tag{1.49}$$

特に

$$\lim_{h\to 0} \sup_{k\in\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(k+h) - \hat{\mu}(k)| = 0. \tag{1.50}$$

(vi) すべての $N \in \mathbb{N}$ と任意の $k_n \in \mathbb{R}^d,\ z_n \in \mathbb{C}\ (n = 1, \cdots, N)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^{N} \hat{\mu}(k_n - k_m) z_n^* z_m \ge 0. \tag{1.51}$$

関数 $C_X(-k) = C_X(k)^*$（特性関数の共役）は分布 P^X のフーリエ変換であるから，特性関数を用いて分布を表す問題は，より一般的には，$(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の任意の有界測度 μ をそのフーリエ変換 $\hat{\mu}$ を用いて表す問題として捉えられる．この問題に対する肯定的解答が次の定理によって与えられる：

【定理 1.22】　μ を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の任意の有界測度とする．このとき，任意の $a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j\ (j = 1, \cdots, d)$ に対して

$$\frac{1}{2^d} \sum_{I_j = [a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=1,\cdots,d} \mu(I_1 \times \cdots \times I_d)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon \sum_{j=1}^d |k_j|} e^{ixk} \hat{\mu}(k)\, dk \right) dx \quad (1.52)$$

が成り立つ．

証明 (1.52) の右辺で極限 $\varepsilon \downarrow 0$ をとる前の量を S_ε とする：

$$S_\varepsilon := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon \sum_{j=1}^d |k_j|} e^{ixk} \hat{\mu}(k)\, dk \right) dx$$

そこで

$$I_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon \sum_{j=1}^d |k_j|} e^{ixk} \hat{\mu}(k)\, dk \quad (1.53)$$

とおけば

$$S_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} I_\varepsilon(x)\, dx$$

と書ける．(1.53) の右辺の $\hat{\mu}$ に $\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iky} d\mu(y)$ を代入し，フビニの定理を用いて，k-積分と μ-積分の順序交換を正当化することにより

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(y) \prod_{j=1}^d J_\varepsilon(x_j, y_j)$$

を得る．ただし

$$J_\varepsilon(u,v) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|t|} e^{iut} e^{-ivt}\, dt, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

簡単な計算により

$$J_\varepsilon(u,v) = \frac{2\varepsilon}{(u-v)^2 + \varepsilon^2}$$

を得る．したがって，再び，フビニの定理によって

$$S_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon(y)\, d\mu(y)$$

が示される．ただし

$$f_\varepsilon(y) := \prod_{j=1}^d \int_{[a_j,b_j]} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x_j - y_j)^2 + \varepsilon^2}\, dx_j.$$

初等的な積分計算により

$$\int_{[a_j,b_j]} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x_j - y_j)^2 + \varepsilon^2}\, dx_j = \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{b_j - y_j}{\varepsilon} - \tan^{-1} \frac{a_j - y_j}{\varepsilon} \right). \quad (1.54)$$

ただし，$\tan^{-1} x$ $(x \in \mathbb{R})$ は逆正接関数である．$|\tan^{-1} x| \le \pi/2$ であるから

$$|f_\varepsilon(y)| \le 1$$

が成り立つ．(1.54) の右辺は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\frac{1}{2}\{\chi_{[a_j,b_j]}(y_j) + \chi_{(a_j,b_j)}(y_j)\}$$

に収束する[13]．ただし，$K \subset \mathbb{R}$ に対して，χ_K は K の定義関数を表す．したがって

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(y) = \frac{1}{2^d}\prod_{j=1}^d \{\chi_{[a_j,b_j]}(y_j) + \chi_{(a_j,b_j)}(y_j)\}.$$

この事実とルベーグ優収束定理により

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon = \frac{1}{2^d}\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d \{\chi_{[a_j,b_j]}(y_j) + \chi_{(a_j,b_j)}(y_j)\}d\mu(y)$$

を得る．よって，(1.52) が成立する．　■

式 (1.52) を有界測度 μ に関する**反転公式**と呼ぶ[14]．この公式を用いることにより，有界測度はそのフーリエ変換から一意的に定まることが導かれる：

【定理 1.23】(一意性)　μ_1, μ_2 を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度で $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ を満たすものとする．このとき，$\mu_1 = \mu_2$.

証明　仮定と (1.52) により，任意の $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$ $(j = 1, \cdots, d)$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=1,\cdots,d} \mu_1(I_1 \times \cdots \times I_d) \\ &= \sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=1,\cdots,d} \mu_2(I_1 \times \cdots \times I_d). \qquad (1.55)\end{aligned}$$

簡単のため，まず，$d = 1$ の場合を考える．したがって，任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して

$$\mu_1([a,b]) + \mu_1((a,b)) = \mu_2([a,b]) + \mu_2((a,b)). \qquad (1.56)$$

[13] $a > 0$ のとき，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tan^{-1} a/\varepsilon = \pi/2$；$a < 0$ のとき，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tan^{-1} a/\varepsilon = -\pi/2$；$a = 0$ のとき，$\tan^{-1} a/\varepsilon = 0$ に注意．

[14] これは**レヴィーの反転公式**と呼ばれる式—たとえば，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1974，第 12 版) の式 (30.19) を参照—と "本質的に" 同じものである．

$b = a + 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ として，$n \to \infty$ の極限を考えると

$$\mu_1(\{a\}) = \mu_2(\{a\}), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

を得る[15]．これと $[a,b] = \{a\} + (a,b]$, $(a,b) = (a,b] \setminus \{b\}$ を用いると (1.56) から $\mu_1((a,b]) = \mu_2((a,b])$ が得られる．したがって，ホップの拡張定理の一意性[16]により，$\mu_1 = \mu_2$ が成立する．

次に一般の $d \geq 2$ の場合を考えよう．$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ 上の有界測度 $\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}$ を

$$\mu_1^{(1)}(B_1) := \sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=2,\cdots,d} \mu_1(B_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d),$$

$$\mu_2^{(1)}(B_1) := \sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=2,\cdots,d} \mu_2(B_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d), \quad B_1 \in \mathfrak{B}^1$$

によって定義できる．このとき，(1.55) によって，すべての $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$ に対して，$\mu_1^{(1)}([a_1,b_1]) + \mu_1^{(1)}((a_1,b_1)) = \mu_2^{(1)}([a_1,b_1]) + \mu_2^{(1)}((a_1,b_1))$．したがって，前半の結果により，$\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} \cdots (*)$．そこで，次の段階として，$B_1 \in \mathfrak{B}^1$ を任意に固定し，$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ 上の有界測度 $\mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}$ を

$$\mu_1^{(2)}(B_2) := \sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=3,\cdots,d} \mu_1(B_1 \times B_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d),$$

$$\mu_2^{(2)}(B_2) := \sum_{I_j=[a_j,b_j],(a_j,b_j),\ j=3,\cdots,d} \mu_2(B_1 \times B_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d), \quad B_2 \in \mathfrak{B}^1$$

によって定義すれば，$(*)$ により，任意の $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 < b_2$ に対して，$\mu_1^{(2)}([a_2,b_2]) + \mu_1^{(2)}((a_2,b_2)) = \mu_2^{(2)}([a_2,b_2]) + \mu_2^{(2)}((a_2,b_2))$ が成り立つ．したがって，$\mu_1^{(2)} = \mu_2^{(2)}$．以下，順次，同様な手続きを繰り返すことにより（$d$ に関する帰納法により）

$$\mu_1(B_1 \times \cdots \times B_d) = \mu_2(B_1 \times \cdots \times B_d), \quad B_j \in \mathfrak{B}^1,\ j = 1, \cdots, d$$

が証明される．したがって，ホップの拡張定理の一意性により，$\mu_1 = \mu_2$ である． ∎

---

[15] 次の事実を使う：一般に，任意の測度空間 (M, Σ, μ) において，$A_n \in \Sigma$ が単調減少で $\mu(A_1) < \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n)$ が成り立つ．

[16] たとえば，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』（裳華房，1974，第 12 版）の定理 9.1 を参照．

【定理 1.24】　μ を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度とし，$\hat{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ が満たされるとする．このとき，μ はルベーグ測度に関して絶対連続であり，そのラドン–ニコディム密度関数を f_μ とすれば

$$f_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \hat{\mu}(k)\, dk \tag{1.57}$$

となる．すなわち

$$d\mu = f_\mu(x)\, dx. \tag{1.58}$$

証明　(1.57) によって関数 f_μ を定義し，(1.58) が成立することを示す．$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(k)|\, dk < \infty$ であるので (1.52) の右辺において，ルベーグの優収束定理により，極限 $\varepsilon \downarrow 0$ と積分を交換できる．したがって

$$\frac{1}{2^d} \sum_{I_j = [a_j, b_j], (a_j, b_j),\ j=1,\cdots,d} \mu(I_1 \times \cdots \times I_d) = \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} f_\mu(x)\, dx.$$

各 $k = 1, \cdots, d$ に対して，$b_k = a_k + 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，$n \to \infty$ とすれば，右辺は 0 に収束するので

$$\sum_{I_j = [a_j, b_j], (a_j, b_j),\ j \neq k} \mu(I_1 \times \cdots \times \{a_k\} \times \cdots \times I_d) = 0.$$

したがって

$$\frac{1}{2^d} \sum_{I_j = [a_j, b_j], (a_j, b_j),\ j=1,\cdots,d} \mu(I_1 \times \cdots \times I_d) = \mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d])$$

となる．ゆえに

$$\mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} f_\mu(x)\, dx,$$
$$a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1, \cdots, d.$$

これから，特に，$f_\mu(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d$ が出る（$\because$ f_μ が有界な連続関数であることは容易にわかる．そこで，仮に $f_\mu(c) < 0$ となる $c \in \mathbb{R}^d$ があったとすれば，f_μ の連続性により，ある $\delta > 0$ があって，$x \in E_c := [c_1 - \delta, c_1 + \delta] \times \cdots \times [c_d - \delta, c_d + \delta]$ ならば $f_\mu(x) < 0$ が成り立つ．したがって，$\int_{E_c} f_\mu\, dx < 0$．だが，$\mu(E_c) \geq 0$ であるから，矛盾が生じる）．また，$a_j = -R,\ b_j = R$ として，$R \to \infty$ とすれば，$\lim_{R\to\infty} \mu([-R, R] \times \cdots \times [-R, R]) = \mu(\mathbb{R}^d)$ であるか

ら，$\int_{\mathbb{R}^d} f_\mu(x)\,dx = \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$．したがって，$f_\mu \geq 0$，$f_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d)$．そこで，$\nu(B) := \int_B f_\mu(x)\,dx$，$B \in \mathfrak{B}^d$ とすれば，ν は $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度であり，$\mu([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]) = \nu([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d])$．これとホップの拡張定理の一意性により，$\mu=\nu$ となる．よって題意が成立する． ∎

以上の結果を確率ベクトルに応用しよう．まず，定理 1.23 からただちに次の重要な事実が導かれる：

【定理 1.25】 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率ベクトル X と確率空間 $(\Omega', \mathfrak{B}', P')$ 上の確率ベクトル X' について，$C_X = C_{X'}$ であるための必要十分条件は $P^X = (P')^{X'}$ となることである．

証明 （必要性）$C_X = C_{X'}$ ならば，P^X のフーリエ変換と $(P')^{X'}$ のフーリエ変換は等しいので，定理 1.23 によって，$P^X = (P')^{X'}$ である．

（十分性）明らか． ∎

この定理は，確率ベクトルの分布はその特性関数から一意的に定まることを語る．

次の事実は，確率ベクトルの分布をその特性関数から求める際に有用である：

【定理 1.26】 X を $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率ベクトルで $C_X \in L^1(\mathbb{R}^d)$ を満たすものとする．このとき，P^X はルベーグ測度に関して絶対連続であり，そのラドン–ニコディム密度関数を ρ_X とすれば

$$\rho_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} C_X(k)\,dk \tag{1.59}$$

となる．すなわち

$$dP^X = \rho_X(x)\,dx. \tag{1.60}$$

証明 $\mu = P^X$ として，定理 1.24 を応用すればよい． ∎

1.10 中心極限定理

特性関数を用いることにより，有限個の確率ベクトルの独立性を特徴づける

ことができる：

【定理 1.27】 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の d 次元確率ベクトル $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は

$$C_X(k_1, \cdots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} C_{X_j}(k_j), \quad k_j \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \cdots, n \tag{1.61}$$

となることである．

証明　（必要性）$f(x_1, \cdots, x_n) = e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j}$ $(x_j \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \cdots, n)$ として定理 1.18 を応用すればよい．

（十分性）(1.61) が成立するとしよう．このとき

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j}\, dP^{(X_1, \cdots, X_n)} = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j}\, dP^{X_1} \otimes \cdots \otimes dP^{X_n}.$$

したがって，定理 1.23 によって，$P^{(X_1, \cdots, X_n)} = P^{X_1} \otimes \cdots \otimes P^{X_n}$．ゆえに，$X_1, \cdots, X_n$ は独立である．∎

定理 1.27 の応用の 1 つとして，確率変数の独立性とガウス型分布の根源的な関係の 1 つを表す定理を証明しよう：

【定理 1.28】（中心極限定理 (central limit theorem)**）** $X_1, \cdots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の独立な確率変数の組でそれぞれ同じ分布をもつものとする．また，$\int_\Omega X_k^2\, dP < \infty$ $(k = 1, \cdots, n)$ とし，$m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ をそれぞれ，X_k の平均，分散とする：

$$\mathrm{E}[X_k] = m, \quad \mathrm{E}[(X_k - m)^2] = \sigma^2, \quad k = 1, \cdots, n. \tag{1.62}$$

このとき

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \tag{1.63}$$

によって定義される確率変数の列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[f(S_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \tag{1.64}$$

が成り立つ．

証明 $Y_k := X_k - m$ とおけば，$Y_1, \cdots, Y_n$ も独立で，それぞれの平均は 0，分散は σ^2 であり，同じ分布——μ としよう——にしたがう．(1.64) を示すために，まず，$t \in \mathbb{R}$ を任意の実数とし，$f(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$ の場合を考える．この場合，定理 1.27 により

$$\mathrm{E}\left[e^{itS_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left[e^{itY_k/\sqrt{n}}\right] = F(t/\sqrt{n})^n.$$

ただし，$F(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{isy}\, d\mu(y)$．確率変数 Y_k の 2 乗可積分性 $\int_\Omega Y_k^2\, dP < \infty$ により，F は 2 回連続微分可能であり，$F(0) = 1$, $F'(0) = 0$, $F''(0) = -\sigma^2$ が成り立つ．したがって

$$F(s) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} s^2 + o(s^2) \quad (s \to 0).$$

ゆえに

$$F(t/\sqrt{n})^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n \to e^{-\sigma^2 t^2/2} \quad (n \to \infty).$$

一方

$$e^{-\sigma^2 t^2/2} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx \tag{1.65}$$

したがって，$f(x) = e^{itx}$ の場合の (1.64) が成り立つ．

次に $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$（$\mathbb{R}$ 上の急減少関数の空間）の場合を考える．この場合

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk \tag{1.66}$$

と表される．ただし

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx \tag{1.67}$$

は f のフーリエ変換である．フビニの定理を応用することにより

$$\mathrm{E}[f(S_n)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\left[e^{ikS_n}\right] \hat{f}(k)\, dk$$

がわかる．$\left|\mathrm{E}\left[e^{ikS_n}\right]\hat{f}(k)\right| \le \left|\hat{f}(k)\right|$ であり，前段の結果があるので，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[f(S_n)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2 k^2/2} \hat{f}(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx.$$

ゆえに (1.64) が成立する．

次に，有界な台をもつ連続関数の全体を $C_0(\mathbb{R})$ とし，$f \in C_0(\mathbb{R})$ の場合を考えよう．このとき，$C_0^\infty(\mathbb{R})$ の関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ で $\|f_k\|_\infty \le \|f\|_\infty$ かつ $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$ を満たすものが存在する（付録 A，定理 A.3-(iv) を参照）．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 k_0 があって，$k \ge k_0$ ならば $\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$ が成り立つ．

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx$$

とおけば

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{E}[f(S_n)] - I(f)| \\
&\quad \le |\mathrm{E}[f(S_n) - f_k(S_n)]| + |\mathrm{E}[f_k(S_n)] - I(f_k)| + |I(f_k) - I(f)| \\
&\quad \le \varepsilon + |\mathrm{E}[f_k(S_n)] - I(f_k)| + |I(f_k) - I(f)|.
\end{aligned}$$

したがって

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathrm{E}[f(S_n)] - I(f)| \le \varepsilon + |I(f_k) - I(f)|.$$

ルベーグの優収束定理により，$\lim_{k\to\infty} I(f_k) = I(f)$．したがって，自然数 k_1 があって，$k \ge k_1$ ならば $|I(f_k) - I(f)| < \varepsilon$ が成り立つ．ゆえに，$k \ge \max\{k_0, k_1\}$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathrm{E}[f(S_n)] - I(f)| \le 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから，これは $\lim_{n\to\infty} |\mathrm{E}[f(S_n)] - I(f)| = 0$ を意味する．したがって，(1.64) が成立する．

最後に，f が有界な連続関数の場合を考える．だが，その前にある準備をする．

S_n の分布を P_n とし，$dP_\infty(x) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx$ とすれば，前段の結果は

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dP_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dP_\infty(x), \quad f \in C_0(\mathbb{R}) \tag{1.68}$$

と表される．

$\lim_{R\to\infty} P_\infty([-R,R]) = 1$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $R_0 > 1$ があって，$R \geq R_0$ ならば，$P_\infty([-R,R]) > 1-\varepsilon$ が成り立つ．次のような関数 $f_0 \in C_0(\mathbb{R})$ が存在する：(i) $|x| \leq R_0$ のとき，$f_0(x) = 1$；(ii) $R_0 \leq |x| \leq R_0+1$ ならば，$0 \leq f_0(x) \leq 1$；(iii) $|x| \geq R_0+1$ ならば $f_0(x) = 0$．このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dP_\infty(x) \geq P_\infty([-R_0, R_0]) > 1-\varepsilon.$$

これと (1.68) により，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq n_0+1$ ならば

$$1-\varepsilon < \int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dP_n(x) \leq P_n([-(R_0+1), R_0+1]).$$

$n = 1, \cdots, n_0$ については

$$P_n([-R_1, R_1]) > 1-\varepsilon$$

となる $R_1 > 0$ がとれる．そこで，$r := \max\{R_0+1, R_1\}$ とすれば

$$P_n([-r,r]^c) = 1 - P_n([-r,r]) < \varepsilon, \quad n \geq 1 \tag{1.69}$$

が成り立つ．

さて，f を $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数とする．このとき，関数 $g \in C_0(\mathbb{R})$ で次の性質をもつものがとれる：$|x| < r$ ならば $g(x) = f(x)$；$|x| \geq r$ ならば $|g(x)| \leq |f(x)|$．このとき，(1.69) によって

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\, dP_n(x) = \int_{[-r,r]^c} |f(x)-g(x)|\, dP_n(x) \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon.$$

(1.68) によって，十分大きなすべての n に対して

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_n(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_\infty(x) \right| < \varepsilon.$$

したがって

$$\begin{aligned} &|\mathrm{E}[f(S_n)] - I(f)| \\ &\quad \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\, dP_n(x) + \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_n(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_\infty(x) \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathbb{R}} |g(x)-f(x)|\,dP_\infty(x) \\
&< (4\|f\|_\infty + 1)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

ゆえに (1.64) が成立する. ∎

(1.64) は，確率変数 S_n の分布 P_n の $n\to\infty$ の極限がガウス分布になる仕方の 1 つを記述する．分布列に関するこの型の収束性は**弱収束**と呼ばれる．また，(1.64) は，もし，$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty$ (P-a.e.) が存在すれば，S_∞ は分散 σ^2，平均 0 のガウス型確率変数であることを示す.

定理 1.28 の意味深さは次の点にある．すなわち，確率変数 $X_1,\cdots,X_n$ が独立，同分布でありさえすれば，X_k の分布はいかなるものであろうとも，極限法則 (1.64) が成立するということである.

一般に，同一の確率空間上の確率変数の列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$ とするとき，適切な条件のもとで

$$
\frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}(Z_n)}}(Z_n - \mathrm{E}[Z_n])
$$

の分布が，分散 1，平均 0 のガウス分布（i.e. 規準正規分布）に弱収束するという形の定理を総称的に**中心極限定理**と呼ぶ．定理 1.28 はこの一般化された意味での中心極限定理の特別な場合なのである.

中心極限定理は，ガウス型確率変数あるいはガウス分布の自然さの一部を明示するものである.

1.11　正型関数とボッホナーの定理

定理 1.19-(vi) や定理 1.21-(vi) の性質は，より一般的な関数のクラスを示唆する：

【定義 1.29】　関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$; $k \mapsto \varphi(k)$ が各 $N\in\mathbb{N}$ と任意の $k_n\in\mathbb{R}^d$, $z_n\in\mathbb{C}$ $(n=1,\cdots,N)$ に対して

$$
\sum_{n,m=1}^N \varphi(k_n-k_m) z_n^* z_m \ge 0 \tag{1.70}
$$

を満たしているとき，φ を**正型関数** (function of positive type) または**正定符号関数**という．

関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が正型ならば，その複素共役関数 φ^* も正型である（$\because$ (1.70) の左辺は実数であるから，その複素共役も実数であることに注意）．

関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が正型であることは，各 $N \in \mathbb{N}$ と任意の $(k_1, \cdots, k_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ によって定義される N 次正方行列 $A_N := (A_{nm})_{n,m=1,\cdots,N}$ $(A_{nm} := \varphi(k_n - k_m))$ が非負の行列であることと同値である．

■**例 1.30** $S = (S_{j\ell})$ を d 次の非負の実対称行列とする．このとき

$$\varphi_S(k) := e^{-\sum_{j,\ell=1}^d S_{j\ell} k_j k_\ell}, \quad k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d$$

によって定義される関数 $\varphi_S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は正型である．

証明 S は実対称行列であるから，d 次の直交行列 T があって，$(TST^{-1})_{j\ell} = \lambda_j \delta_{j\ell}$ $(j, \ell = 1, \cdots, d)$ と対角化できる（$\delta_{j\ell}$ はクロネッカーのデルタ）．ただし，λ_j は S の固有値である．仮定から $\lambda_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, d)$ となる．したがって，$\xi = Tk$ とすれば

$$\sum_{j,\ell=1}^d S_{j\ell} k_j k_\ell = \sum_{j=1}^d \lambda_j \xi_j^2$$

となる．ゆえに（$\lambda_j = 0$ の場合の $e^{-x_j^2/4\lambda_j}/\sqrt{4\pi\lambda_j}$ はデルタ超関数 $\delta(x_j)$ で置き換える）

$$\varphi_S(k) = \prod_{j=1}^d e^{-\lambda_j \xi_j^2} = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_j x_j} \frac{e^{-x_j^2/4\lambda_j}}{\sqrt{4\pi\lambda_j}}\, dx_j = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik(T^{-1}x)}\, d\mu_S(x).$$

ただし

$$\mu_S(B) := \int_B \prod_{j=1}^d \frac{e^{-x_j^2/4\lambda_j}}{\sqrt{4\pi\lambda_j}}\, dx_j, \quad B \in \mathfrak{B}^d.$$

したがって

$$\sum_{n,m=1}^N \varphi_S(k_n - k_m) z_n^* z_m = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{n=1}^N e^{-ik_n(T^{-1}x)} z_n \right|^2 d\mu_S(x) \geq 0.$$

ゆえに φ_S は正型である． ■

正型関数の基本的性質を見ておこう：

【命題 1.31】 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は正型であるとする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する：

(i) $$\varphi(0) \geq 0.$$

(ii) $$\varphi(k) = \varphi(-k)^*, \quad \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

(iii) $$|\varphi(k)| \leq \varphi(0), \quad \forall k \in \mathbb{R}^d.$$

証明 (i) (1.70) において，$N = 1$ の場合を考えると $\varphi(0)|z_1|^2 \geq 0$, $\forall z_1 \in \mathbb{C}$. したがって，$\varphi(0) \geq 0$.

(ii) と (iii) (1.70) で $N = 2$ の場合を考え，$k = k_1 - k_2$ とすれば，上に注意したように，2 次の正方行列

$$A_2 = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(k) \\ \varphi(-k) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

は非負である．したがって，A_2 はエルミート行列であり，行列式 $\det A_2 = \varphi(0)^2 - \varphi(k)\varphi(-k)$ は非負である．前者から $\varphi(k) = \varphi(-k)^*$ がしたがう．後者からは，$0 \leq \varphi(0)^2 - \varphi(k)\varphi(-k) = \varphi(0)^2 - |\varphi(k)|^2$ となるので，これと (i) を合わせれば，(iii) の結果が得られる．■

すでに見たように，有界測度のフーリエ変換は連続かつ正型である（定理 1.21）．実は，この逆も成り立つ：

【定理 1.32】（ボッホナーの定理） φ を $\mathbb{R}^d$ 上の連続な正型関数とする．このとき，$(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度 μ で

$$\varphi(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx}\, d\mu(x), \quad k \in \mathbb{R}^d \tag{1.71}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．特に，$\varphi(0) = 1$ ならば，μ は確率測度である．

証明 ここでは，スペクトル理論を用いる関数解析学的な証明を与える[17]．$\mathcal{H}_0$ を $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数で有限個の点を除いて 0 となるものの全体とする：

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある有限集合 } F_f \subset \mathbb{R}^d \text{ があって} \\ f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus F_f \end{array} \right\}.$$

[17] 純測度論的な証明も可能である．たとえば，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1963) の定理 30.5 と定理 30.7 を参照．

容易にわかるように，$\mathcal{H}_0$ は関数の和と複素数倍の演算に関してベクトル空間である．任意の $f,g \in \mathcal{H}_0$ に対して

$$\langle f,g\rangle_\varphi := \sum_{x,y\in\mathbb{R}^d} f(x)^*\varphi(x-y)g(y)$$

とすれば，$\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$ は $\mathcal{H}_0$ の半正定値内積を与える．$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{H}_0 | \langle f,f\rangle_\varphi = 0\}$ とすれば，これは部分空間である．したがって，商集合 $\mathcal{H}_0/\mathcal{N}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$ から導かれる自然な内積—これを $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とすれば，$\langle[f],[g]\rangle := \langle f,g\rangle_\varphi$ （$[f]$ は $f \in \mathcal{H}_0$ の同値類）—によって内積空間になる[18]．そこで，$\mathcal{H}_0/\mathcal{N}$ の完備化を $\mathcal{H}$ とする．

さて，各 $a \in \mathbb{R}^d$ に対して，写像 $U_a : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ を

$$(U_a f)(x) := f(x-a), \quad f \in \mathcal{H}_0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

によって定義すれば，U_a は線形であり，$\langle U_a f, U_a g\rangle_\varphi = \langle f,g\rangle_\varphi$，$f,g \in \mathcal{H}_0$ を満たす．したがって，特に，$U_a\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$．また，$U_{a+b} = U_aU_b = U_bU_a$，$a,b \in \mathbb{R}^d$ が成立する．これは $U_aU_{-a} = U_{-a}U_a = U_0 = I$ (恒等作用素) を意味するから，$U_a\mathcal{N} = \mathcal{N}$ が結論される．そこで，$\hat{U}_a : \mathcal{H}_0/\mathcal{N} \to \mathcal{H}_0/\mathcal{N}$ を $\hat{U}_a[f] := [U_a f]$，$[f] \in \mathcal{H}_0/\mathcal{N}$ によって定義できる．このとき，$\hat{U}_a$ は全単射な等距離線形作用素であり，$\hat{U}_a\hat{U}_b = \hat{U}_b\hat{U}_a = \hat{U}_{a+b}$，$a,b \in \mathbb{R}^d$ が成立する．さらに，φ の連続性から $\hat{U}_a$ の a に関する強連続性が導かれる[19]．したがって，拡大定理により，$\hat{U}_a$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素に一意的に拡大される．この拡大を V_a とすれば，V_a は a について強連続であり，$V_aV_b = V_bV_a = V_{a+b}$，$a,b \in \mathbb{R}^d$ が成り立つ．そこで，$\{e_j\}_{j=1}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とし（$(e_j)_k$ （$e_j \in \mathbb{R}^d$ の第 k 成分）$= \delta_{jk}$，$(j,k = 1,\cdots,d)$），各 $j = 1,\cdots,d$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$V_j(t) := V_{te_j}$ とすれば，$\{V_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathcal{H}$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群である．したがって，ストーンの定理により，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A_j で $V_j(t) = e^{itA_j}$，$t \in \mathbb{R}$ となるものがただ 1 つ存在する．$V_j(t)V_k(s) = V_k(s)V_j(t)$ $(j,k = 1,\cdots,d)$，$s,t \in \mathbb{R}$ が成り立つから，自己共役作用素の組 $(A_1,\cdots,A_d)$ は強可換である（付録 C，定理 C.6)．ゆえに，d 次元スペクトル測度 E があって—具体的には，A_j のスペクトル測度を E_{A_j} とすれば，$E = E_{A_1} \otimes \cdots \otimes E_{A_d}$（直積スペクトル

---

[18] この事実の詳しい証明については，拙著，『量子統計力学の数理』(共立出版，2008) の p.49〜50 を参照（この部分だけ独立に読める)．

[19] $a = 0$ での強連続性を示せば十分である．$\|\hat{U}_a[f] - [f]\|^2 = 2\langle f,f\rangle_\varphi - 2\mathrm{Re}\,\langle f,U_a f\rangle_\varphi$ であり，$\langle f,U_a f\rangle_\varphi = \sum_{x,y\in\mathbb{R}^d} f(x)^*\varphi(x-y-a)f(y) \to \sum_{x,y\in\mathbb{R}^d} f(x)^*\varphi(x-y)f(y) = \langle f,f\rangle_\varphi$ $(a \to 0)$．

測度)—，$\langle\psi, V_a\eta\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iax} d\langle\psi, E(x)\eta\rangle$，$\psi,\eta \in \mathcal{H}$ と表される．$f_0(x)$ を $f_0(0) = 1$，$f_0(x) = 0$，$x \neq 0$ を満たす関数とする（明らかに $f_0 \in \mathcal{H}_0$）．このとき，任意の $k \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\varphi(k) = \langle U_k f_0, f_0\rangle_\varphi = \langle V_k[f_0], [f_0]\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx}\, d\langle [f_0], E(x)[f_0]\rangle .$$

そこで，$\mu(\cdot) = \langle [f_0], E(\cdot)[f_0]\rangle$ とすれば，μ は $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の有界測度であり，(1.71) が成り立つ．一意性は定理 1.23 による．∎

1.12　ガウス型確率変数の特性関数による特徴づけ

ガウス型確率変数の場合に特性関数がどのようになるかを見ておこう．

【定理 1.33】　確率変数 X が平均 $m \in \mathbb{R}$，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数であるための必要十分条件はその特性関数 C_X が

$$C_X(k) = e^{-ak^2/2+ikm}, \quad k \in \mathbb{R} \tag{1.72}$$

となることである．

証明　（必要性）平均 $m \in \mathbb{R}$，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数 X の特性関数は

$$C_X(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \frac{e^{-(x-m)^2/2a}}{\sqrt{2\pi a}}\, dx$$

である．変数変換 $y = (x-m)/\sqrt{2a}$ と積分公式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+ikt}\, dt = \sqrt{\pi}\, e^{-k^2/4}, \quad k \in \mathbb{R} \tag{1.73}$$

を用いることにより，(1.72) が導かれる．

（十分性）(1.72) が成り立つとする．したがって，$C_X \in L^1(\mathbb{R})$．さらに

$$\begin{aligned}\rho(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} C_X(k)\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ik(x-m)}\, e^{-ak^2/2}\, dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-(x-m)^2/2a} \quad (\because\ (1.73)).\end{aligned}$$

ゆえに，定理 1.26 によって，$dP^X = \rho(x)\, dx$ となる．したがって，X は平均 $m \in \mathbb{R}$，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数 X である．∎

1.13 モーメントと特性関数

この節では，モーメントと特性関数の関係を調べる．X を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数とする．

【定理 1.34】 n を自然数とする．このとき

$$\int_\Omega |X(\omega)|^n \, dP(\omega) < \infty \tag{1.74}$$

ならば，X の特性関数 C_X は n 回連続微分可能であり

$$C_X^{(j)}(k) = i^j \int_\Omega X(\omega)^j \, e^{ikX(\omega)} \, dP(\omega), \quad j = 1, \cdots, n, \ k \in \mathbb{R} \tag{1.75}$$

が成り立つ．ここで，$C_X^{(j)}$ は C_X の j 階の導関数を表す．したがって，特に

$$\mathrm{E}[X^j] = i^{-j} C_X^{(j)}(0), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{1.76}$$

証明 まず，(1.74) は，任意の $j = 1, \cdots, n$ に対して，$\int_\Omega |X(\omega)|^j \, dP(\omega) < \infty$ を意味することに注意する．実際

$$\begin{aligned} \int_\Omega |X(\omega)|^j \, dP(\omega) &= \int_{|X(\omega)| \leq 1} |X(\omega)|^j \, dP(\omega) + \int_{|X(\omega)| > 1} |X(\omega)|^j \, dP(\omega) \\ &\leq \int_{|X(\omega)| \leq 1} 1 \, dP(\omega) + \int_{|X(\omega)| > 1} |X(\omega)|^n \, dP(\omega) \\ &\leq 1 + \int_\Omega |X(\omega)|^n \, dP(\omega) < \infty. \end{aligned}$$

この事実と微分・積分の順序交換に関する定理を応用することにより，C_X の n 回連続微分可能性および公式 (1.75) が証明される[20]． ■

(1.76) は，確率変数 X の j 次モーメントが特性関数の j 階の導関数の原点での値から定まることを示す．

実は，定理 1.34 のある意味での逆も成り立つ．すなわち，特性関数のなめらかさ（微分可能性）がモーメントの存在を導くのである．応用上はこのほうが有用である．

---

[20] 微分は局所的な概念であるから，任意の実数 a, b （$a < b$）に対して，k が (a, b) に属する場合について，$C_X(k)$ の微分可能性を示せばよい．

【定理 1.35】 $C_X(k)$ が $k=0$ の近傍で $2n$ 回連続微分可能ならば

$$\int_\Omega |X(\omega)|^{2n}\, dP(\omega) < \infty \tag{1.77}$$

であり，(1.75) が $j=1,\cdots,2n$ に対して成り立つ．

証明 まず，$n=1$ のときに題意が成立することを示す．そのために，$k=0$ の近傍で

$$C_X^{(2)}(k) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{C_X(k+\varepsilon)+C_X(k-\varepsilon)-2C_X(k)}{\varepsilon^2}$$

と表されることに注目する[21]．ここで，特に $k=0$ の場合を考えると

$$-C_X^{(2)}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega 4\frac{\sin^2\frac{\varepsilon X(\omega)}{2}}{\varepsilon^2}\, dP(\omega).$$

そこで，ファトーの補題と $\lim_{\varepsilon\to 0} 4\sin^2\frac{\varepsilon X(\omega)}{2}/\varepsilon^2 = X(\omega)^2$ を用いると

$$-C_X^{(2)}(0) \ge \int_\Omega X(\omega)^2\, dP(\omega)$$

が得られる．したがって，(1.77) が $n=1$ の場合に成り立つ．

次に (1.77) が $n=2m$（m は自然数）のとき成立するとしよう．このとき，定理 1.34 により，$C_X^{(2m)}(k) = (-1)^m \int_\Omega X(\omega)^{2m}\, e^{ikX(\omega)}\, dP(\omega)$．$C_X^{(2m+2)} = d^2C_X^{(2m)}/dk^2$ に注意すれば，前段の議論から

$$(-1)^{m+1}C_X^{(2m+2)}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega 4\frac{\sin^2\frac{\varepsilon X(\omega)}{2}}{\varepsilon^2} X(\omega)^{2m}\, dP(\omega).$$

したがって，前段と同様にして $(-1)^{m+1}C_X^{(2m+2)}(0) \ge \int_\Omega X(\omega)^{2m+2}\, dP(\omega)$．ゆえに (1.77) は $n=2(m+1)$ のときも成立する．■

定理 1.34 と定理 1.35 は d 次元確率ベクトル $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の場合へと拡張される：

---

[21] 一般に，開区間 (a,b) 上の 2 回連続微分可能な関数 f に対して

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)-2f(x)}{\varepsilon^2}, \quad x\in(a,b)$$

が成り立つ．これはテイラー展開を用いて容易に証明される．

【定理 1.36】

(i) $d, n \in \mathbb{N}$ とし，$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \leq n$ を満たすすべての多重指数 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ $(\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ に対して

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^{d} |X_j(\omega)|^{\alpha_j} \, dP(\omega) < \infty \tag{1.78}$$

とする．このとき，C_X は n 回連続微分可能であり

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} C_X(k)}{\partial k_1^{\alpha_1} \cdots \partial k_d^{\alpha_d}} = i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} \int_\Omega \left(\prod_{j=1}^{d} X_j(\omega)^{\alpha_j} \right) e^{i \sum_{j=1}^{d} k_j X_j(\omega)} \, dP(\omega)$$

が成り立つ．したがって，特に

$$\mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{d} X_j^{\alpha_j} \right] = i^{-\alpha_1-\cdots-\alpha_d} \left. \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} C_X(k)}{\partial k_1^{\alpha_1} \cdots \partial k_d^{\alpha_d}} \right|_{k=0}.$$

(ii) C_X が $k = 0$ の近傍で $2n$ 回連続微分可能ならば，$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \leq 2n$ を満たすすべての多重指数 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ $(\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ に対して (1.78) が成り立つ．

この定理の証明の方法は，定理 1.34 と定理 1.35 の証明方法と基本的に同じなので，証明の詳細を埋めることは読者に任せる．

1.14　ガウス型確率ベクトル

ガウス型確率変数の多変数版を導入する．$(a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ を半正定値実対称行列とする．すなわち，任意の $x_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k \geq 0$ が成り立つとする．1 個のガウス型確率変数に関する定理 1.33 を顧慮することにより，次の自然な定義へといたる．

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の n 次元確率ベクトル $X = (X_1, \cdots, X_n)$ の特性関数が

$$C_X(t_1, \cdots, t_n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} t_j t_k \right), \quad (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \tag{1.79}$$

という形で与えられるとき，X を**ガウス型確率ベクトル**あるいは**結合的ガウス型確率変数**という[22]．この場合，$C_X(t_1, \cdots, t_n)$ は無限回連続微分可能であるから，定理 1.36-(ii) によって，$X_1, \cdots, X_n$ の任意の積は可積分であり，任意の多重指数 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して

$$\mathrm{E}[X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}] = i^{-\sum_{j=1}^n \alpha_j} \left. \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} C_X(t_1, \cdots, t_n)}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}} \right|_{t_j=0,\ j=1,\cdots,n} \tag{1.80}$$

が成り立つ．特に

$$\mathrm{E}[X_j] = 0, \quad \mathrm{E}[X_j X_k] = a_{jk} \quad (j, k = 1, \cdots, n). \tag{1.81}$$

したがって，X の分散–共分散行列は $(a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ である．

(1.81) において，$j = k$ の場合を考えると，左辺は非負であるから

$$a_{jj} \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{1.82}$$

が導かれる．また，各 X_j の特性関数は

$$C_{X_j}(t_j) = C_X(0, \cdots, 0, t_j, 0, \cdots, 0) = e^{-a_{jj} t_j^2/2} \tag{1.83}$$

であるので，X_j は平均 0，分散 a_{jj} のガウス型確率変数である．

ガウス型確率ベクトルのモーメントに関してはある一般的公式が成立する：

【定理 1.37】 $n \geq 2$ として，$(X_1, \cdots, X_n)$ をガウス型確率ベクトルとする．このとき，

$$\mathrm{E}[X_1 \cdots X_{2m-1}] = 0, \quad m \leq \frac{n+1}{2}, \tag{1.84}$$

$$\mathrm{E}[X_1 \cdots X_{2m}] = \sum_{\mathrm{comb}} a_{j_1 k_1} \cdots a_{j_m k_m}, \quad m \leq \frac{n}{2}. \tag{1.85}$$

ただし，$\sum_{\mathrm{comb}}$ は，$1, \cdots, 2m$ から m 個の互いに異なる対 $(j_1, k_1), \cdots (j_m, k_m)$ $(j_1 < k_1, \cdots, j_m < k_m; j_1 < j_2 < \cdots < j_m)$ を取り出す仕方すべて—— $(2m)!/(2^m m!)$ 通りある——にわたる和を表す[23]．

---

[22] 便宜上，特性関数の変数の記号として，$k \in \mathbb{R}^n$ のかわりに $(t_1, \cdots, t_n)$ を用いる．

[23] 「comb」は combination の意．たとえば

$$\mathrm{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = a_{12} a_{34} + a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23}.$$

証明 (1.79) によって

$$C_X(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sum_{j_1,k_1,\cdots,j_\ell,k_\ell=1}^{n}a_{j_1k_1}\cdots a_{j_\ell k_\ell}t_{j_1}t_{k_1}\cdots t_{j_\ell}t_{k_\ell}. \tag{1.86}$$

容易にわかるように，右辺の $t_1,\cdots,t_n$ に関する多重ベキ級数はすべての $t_j\in\mathbb{R}$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して絶対収束する．したがって，それは，$t_1,\cdots,t_n$ について何回でも項別微分できる．この級数において，変数 t_j たちの積は偶数個しか現れないから，$t_1,\cdots,t_n$ に関する奇数回の偏微分を行い，$t_j=0$ $(j=1,\cdots,n)$ としたものは 0 となる．したがって，(1.84) が成立する．次に (1.86) の右辺において，$t_1t_2\cdots t_{2m}$ の係数は

$$\frac{(-1)^m}{2^m m!}\sum_{\{j_1,k_1,\cdots,j_m,k_m\}=\{1,2,\cdots,2m\}}a_{j_1k_1}\cdots a_{j_mk_m}$$

である．ただし，$\sum_{\{j_1,k_1,\cdots,j_m,k_m\}=\{1,2,\cdots,2m\}}$ は，集合 $\{j_1,k_1,\cdots,j_m,k_m\}$ が集合 $\{1,2,\cdots,2m\}$ に等しくなるような $j_1,k_1,\cdots,j_m,k_m$ についての和を表す．簡単な組み合わせ論的考察により

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^m}{2^m m!}\sum_{\{j_1,k_1,\cdots,j_m,k_m\}=\{1,2,\cdots,2m\}}a_{j_1k_1}\cdots a_{j_mk_m}\\&=(-1)^m\sum_{\text{comb}}a_{j_1k_1}\cdots a_{j_mk_m}\end{aligned}$$

がわかる．これと (1.80) で $n=2m$, $\alpha_j=1$ $(j=1,\cdots,2m)$ とした式から (1.85) が得られる． ∎

ガウス型確率ベクトルの結合分布については次の定理が成り立つ：

【定理 1.38】 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ をガウス型確率ベクトルとし，その分散–共分散行列 $a=(a_{jk})_{1\le j,k\le n}$ は正定値であるとする（したがって，逆行列 a^{-1} が存在し，行列式 $\det a$ は正）．このとき，X の分布 P^X はルベーグ測度に関して絶対連続であり

$$dP^X(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det a}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(a^{-1})_{jk}x_jx_k\right)dx,$$
$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \tag{1.87}$$

証明　定理 1.26 を応用する．$\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} t_j t_k = \mathbf{t} \cdot a\mathbf{t}$$

と書ける．a は実対称行列であるから，直交行列 T が存在して $(TaT^{-1})_{jk} = \lambda_j \delta_{jk}$ $(j,k = 1, \cdots, n)$ と対角化できる．ただし，λ_j は a の固有値である．仮定により，$\lambda_j > 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ である．したがって，$\mathbf{s} = T\mathbf{t}$ とおけば

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} t_j t_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j^2$$

となる．ゆえに，変数変換により

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} C_X(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j s_j^2/2}\, d\mathbf{s} = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j s_j^2/2}\, ds_j \\ &= \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\det a}}.\end{aligned}$$

よって，$C_X \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である．そこで，次に

$$\rho(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{j=1}^n t_j x_j} C_X(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$$

を計算する．上述の変数変換と公式 (1.73) により

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{j=1}^n s_j (Tx)_j}\, e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j s_j^2/2}\, ds_1 \cdots ds_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det a}} e^{-\sum_{j=1}^n (Tx)_j^2/2\lambda_j}.\end{aligned}$$

一方

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(Tx)_j^2}{\lambda_j} = (Tx) \cdot [(TaT^{-1})^{-1}(Tx)] = x \cdot a^{-1}x.$$

したがって

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det a}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (a^{-1})_{jk} x_j x_k\right).$$

ゆえに，定理 1.26 により，題意が成立する．　■

次の事実も重要かつ有用である：

【命題 1.39】 確率ベクトル $X=(X_1,\cdots,X_n)$ がガウス型であるための必要十分条件は，任意の $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して $Y=\sum_{j=1}^n c_jX_j$ がガウス型確率変数であることである．この場合，X の分散–共分散行列が (a_{jk}) ならば Y の平均は 0 で，分散は $\sum_{j,k=1}^n a_{jk}c_jc_k$ である．

証明 （必要性）X がガウス型であるとしよう．したがって，C_X は (1.79) の形で与えられる．$Y=\sum_{j=1}^n c_jX_j$ とすれば

$$C_Y(t)=\mathrm{E}\bigl[e^{itY}\bigr]=C_X(tc_1,\cdots,tc_n)=e^{-(\sum_{j,k=1}^n a_{jk}c_jc_k)t^2/2}$$

したがって，Y は平均 0，分散が $\sum_{j,k=1}^n a_{jk}c_jc_k$ のガウス型確率変数である．

（十分性）任意の $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して，Y がガウス型であるとしよう．したがって，ある $f=f(c)\geq 0$ $(c=(c_1,\cdots,c_n))$ が存在して

$$\mathrm{E}\bigl[e^{it\sum_{j=1}^n c_jX_j}\bigr]=e^{-f(c)t^2/2},\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

が成り立つ．左辺は $\mathrm{E}\bigl[e^{i\sum_{j=1}^n(tc_j)X_j}\bigr]=e^{-f(tc)/2}$ とも書けるので

$$f(tc)=t^2f(c) \tag{1.88}$$

が成り立つ．各 j に対して，$c_k=0,\ j\neq k$ とすることにより，各 X_j は平均 0 のガウス型確率変数であることがわかる．したがって，命題 1.13 によって，任意の $p>0$ に対して，$\mathrm{E}[|X_j|^p]<\infty$ である．この事実とシュヴァルツの不等式を繰り返し用いることにより

$$\mathrm{E}[|X_1|^{p_1}\cdots|X_n|^{p_n}]<\infty,\quad p_j>0,\ j=1,\cdots,n.$$

したがって，f は c について無限回微分可能であり，特に

$$\left.\frac{\partial^2 f(c)}{\partial c_j\partial c_k}\right|_{c=0}=2a_{jk}.$$

ただし，$a_{jk}:=\mathrm{E}[X_jX_k]$ である．(1.88) の両辺を t について 2 回微分し，$t=0$ とすれば

$$\sum_{j,k=1}^n c_jc_k\frac{\partial f(0)}{\partial c_j\partial c_k}=2f(c).$$

したがって

$$f(c) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} c_j c_k.$$

行列 $(a_{jk})_{j,k=1,\cdots,n}$ が半正定値であることは容易にわかる．ゆえに，X はガウス型確率ベクトルである． ∎

1.15　確率変数のウィック積

確率変数のベキを扱う上で有用な概念を定義する．以下，確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の可積分関数 f に対して，その P に関する期待値を $\langle f \rangle$ という記号で表す：

$$\langle f \rangle := \mathrm{E}[f] = \int_{\Omega} f \, dP. \tag{1.89}$$

まず，1個の確率変数の場合から始める．X を $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数で

$$\langle |X|^p \rangle < \infty, \quad \forall p \in \mathbb{N} \tag{1.90}$$

を満たすものとする．実変数 $t \in \mathbb{R}$ に関して連続微分可能な関数 $: t^n :$ $(n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ を次のように帰納的に定義する：

$$: t^0 : = 1, \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} : t^n : = n : t^{n-1} :, \quad n \geq 1, \tag{1.92}$$

$$\langle : X^n : \rangle = 0, \quad n \geq 1. \tag{1.93}$$

ただし，$: X^n :$ は $: t^n :$ において $t = X$ を代入して得られる (Ω 上の) 関数である．

【命題 1.40】　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$: t^n :$ は一意的に定まり，t に関して n 次の多項式である．

証明　(1.92) によって，$: t^n : = q_n(t) + c$．ただし，$q_n(t) := n \int_0^t : s^{n-1} : ds$ であり，c は定数である．(1.93) により，$c = -\langle q_n(X) \rangle$．したがって，

$$: t^n : = q_n(t) - \langle q_n(X) \rangle \tag{1.94}$$

となり，$:t^n:$ は一意的に定まる．

(1.94) で $n=1$ の場合を考えると

$$:t: = t - \langle X \rangle \tag{1.95}$$

となる．ゆえに $n=1$ の場合の主張が成立する．$n \geq 2$ に対して，$:t^{n-1}:$ が t について $(n-1)$ 次の多項式であるとしよう．このとき，$q_n(t)$ は t について n 次の多項式である．したがって，$:t^n:$ もそうである．よって，帰納法により，主張が成り立つ．■

式 (1.95) や $n=2$ の場合の式

$$:t^2: = t^2 - 2\langle X \rangle t - \left\langle X^2 \right\rangle + 2\langle X \rangle^2 \tag{1.96}$$

からも明らかなように，多項式 $:t^n:$ の係数は X のベキの平均に依存している．この意味において，t の多項式 $:t^n:$ は確率変数 X に同伴する形で定まることに注意しよう．そこで，上述のように定義される多項式 $:t^n:$ を X に付随する**ウィック多項式**と呼び，n をその次数という[24]．

✷ 注意 1.41　X^2 も 1 つの確率変数であるから，X^2 に付随するウィック多項式も考えられる．いま，これを $:t^n:'$ とすれば

$$:t:' = t - \left\langle X^2 \right\rangle$$

したがって，$\langle X \rangle \neq \langle X^2 \rangle$ ならば，$:t: \neq :t:'$ である．すなわち，この場合，X^2 に付随するウィック多項式と X に付随するウィック多項式は異なる．X からつくられる他の確率変数に付随するウィック多項式についても同様である．この点は，一見矛盾する事態に遭遇しないために，明晰に意識している必要がある．

実変数 t の関数 $:t^n:$ で $t=X$ として得られる確率変数 $:X^n:$ を X の n 次の**ウィック積** (Wick product) と呼ぶ．

(1.95), (1.96) より

$$:X: = X - \langle X \rangle, \tag{1.97}$$

$$:X^2: = X^2 - 2\langle X \rangle X - \left\langle X^2 \right\rangle + 2\langle X \rangle^2. \tag{1.98}$$

[24] 呼称は量子場の理論（後の章を参照）に由来する（Wick は物理学者）．

✱注意 1.42　注意 1.41 の事柄があるので念のために注意しておくと，$:X^n:$ は，その定義から明らかなように，X に付随する n 次のウィック多項式から定まるものであり，その場合にしかこの記号は使わない．

ウィック積を統一的には扱うには，その母関数 $\sum_{n=0}^{\infty} :X^n: z^n/n!\ (z \in \mathbb{C})$ を考えるのが 1 つの自然な方法である[25]．だが，その場合，この級数の収束性が問題になる．そこで，まず，収束性の問題は考慮にいれず，$z \in \mathbb{C}$ の形式的ベキ級数

$$C(t,z) := \text{formal-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{:t^n:}{n!} z^n$$

を考えてみる．ここで，formal-$\sum$ は形式的ベキ級数であることを表す記法である[26]．(1.92) を用いることにより，

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t,z) = zC(t,z)$$

が成り立つことがわかる．ただし，ここでの等号は，もちろん，z に関する形式的ベキ級数としての相等を意味する．したがって

$$C(t,z) = u(z)\text{formal-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^n.$$

ただし，$u(z)$ は z のある形式的ベキ級数である．ゆえに

$$\langle C(X,z)\rangle = u(z)\text{formal-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle X^n\rangle}{n!} z^n.$$

(1.93) によって，$\langle C(X,z)\rangle = 1$．したがって

$$u(z)\text{formal-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle X^n\rangle}{n!} z^n = 1.$$

ゆえに，もし，級数

$$v_X(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle X^n\rangle}{n!} z^n$$

[25] 母関数の考え方は特殊関数論における基本的な方法の 1 つである．
[26] この記法は標準的なものではなく，本書だけで使用する記法である．

が $|z| < r$ で収束し，かつこの領域で $v_X(z) \neq 0$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} :t^n: z^n/n!$ も収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{:t^n:}{n!} z^n = \frac{e^{tz}}{v_X(z)}, \quad |z| < r$$

となる．この場合，$:e^{tz}:$ を

$$:e^{tz}: \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:t^n:}{n!} z^n \tag{1.99}$$

によって定義する．したがって

$$:e^{zX}: \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:X^n:}{n!} z^n, \quad P\text{-a.e.}, \ |z| < r \tag{1.100}$$

であり

$$:e^{zX}: \ = \frac{e^{zX}}{v_X(z)}, \quad |z| < r \tag{1.101}$$

となる．そこで，級数 $v_X(z)$ が収束するような X のクラスを見出す必要がある．1 つの判定条件が次の補題によって与えられる．

【補題 1.43】 任意の $c > 0$ に対して

$$\left\langle e^{c|X|} \right\rangle < \infty \tag{1.102}$$

とする．このとき，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，級数 $v_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle X^n \rangle z^n/n!$ は収束し

$$v_X(z) = \left\langle e^{zX} \right\rangle, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1.103}$$

が成り立つ．さらに，ある $r_0 > 0$ が存在して，$|z| < r_0$ ならば $v_X(z) \neq 0$ である．

証明 $|X|^p \leq p!\, e^{|X|}$ であるから，仮定 (1.102) のもとでは，条件 (1.90) は自動的に満たされる．$f_N = \sum_{n=0}^{\infty} X^n z^n/n!$ とおくと $\lim_{N\to\infty} f_N(\omega) = e^{zX(\omega)}$ (P-a.e.ω) であり，任意の $q > 0$ に対して

$$|f_N(\omega) - e^{zX(\omega)}|^q \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^n |z|^n}{n!} \right)^q \leq e^{q|z||X(\omega)|}$$

右辺は，(1.102) によって，可積分である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle |f_N - e^{zX}|^q \right\rangle = 0. \tag{1.104}$$

特に，$q = 1$ の場合を考えると

$$\lim_{N\to\infty} \langle f_N \rangle = \left\langle e^{zX} \right\rangle$$

が導かれる．ゆえに (1.103) が成立する．$v_X(0) = 1 \neq 0$ であり，$v_X(z)$ は z の整関数であるから，ある $r > 0$ があって，$|z| < r$ ならば $v_X(z) \neq 0$ となる．■

【定理 1.44】　X を平均 0，分散 $a > 0$ のガウス型確率変数とする．

(i) すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$: e^{zX} : \ = e^{zX - z^2 a/2} \tag{1.105}$$

が成り立つ．

(ii) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$: X^n : \ = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2m)!\, m!} \left(-\frac{1}{2}a\right)^m X^{n-2m}. \tag{1.106}$$

ただし，$[n/2]$ は $n/2$ を超えない最大の整数を表す（ガウス記号）．

(iii) すべての $z \in \mathbb{C}$ と任意の $p > 0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \left| : e^{zX} : - \sum_{n=0}^{N} \frac{: X^n :}{n!} z^n \right|^p \right\rangle = 0. \tag{1.107}$$

証明　(i) 定理 1.14-(ii) によって，X は条件 (1.102) を満たし，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\sum_{n=0}^{\infty} \langle X^n \rangle z^n/n!$ は収束する．したがって，

$$: e^{zX} : \ = \frac{e^{zX}}{\langle e^{zX} \rangle} = e^{zX}\, e^{-z^2 a/2} \quad (\because (1.26))$$

が成り立つ．

(ii) (1.105) の右辺は

$$e^{zX-z^2a/2} = e^{zX}\, e^{-z^2a/2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k X^k}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m!}\left(-\frac{1}{2}a\right)^m\right) \quad (P\text{-a.e.}) \quad (1.108)$$

と変形できる．2 重級数

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k X^k}{k!}\frac{z^{2m}}{m!}\left(-\frac{1}{2}a\right)^m$$

は絶対収束することがわかるので，$e^{zX-z^2a/2}$ はこの 2 重級数に等しい．そこで，この級数において，各 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して，$n = 2m + k$ となる k について和をとり，そのあとで n について和をとる形に書きかえれば

$$e^{zX-z^2a/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2m)!\,m!}\left(-\frac{1}{2}a\right)^m X^{n-2m}\right) z^n$$

となる．これと (1.100) を比較し，整級数展開の展開係数の一意性を使えば，(1.106) が得られる．

(iii) 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$g_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{:X^n:}{n!} z^n$$

とおくと，(1.106) によって

$$g_N = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{1}{(n-2m)!\,m!}\left(-\frac{1}{2}a\right)^m X^{n-2m} z^n.$$

したがって，$\lim_{N\to\infty} g_N = e^{zX-az^2/2}$ (P-a.e.)．また

$$|g_N| \le \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{1}{(n-2m)!\,m!}\left(\frac{1}{2}a\right)^m |X|^{n-2m}|z|^n \le e^{|z||X|+a|z|^2/2}.$$

したがって

$$\left|e^{zX-az^2/2} - g_N\right|^p \le 2^p\, e^{p(|z||X|+a|z|^2/2)}.$$

関数 $e^{p(|z||X|+a|z|^2/2)}$ は可積分である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\left|e^{zX-az^2/2}-g_N\right|^p\right\rangle=0.$$

これと (1.105) により，(1.107) がしたがう． ∎

定理 1.44 から次の重要な事実が導かれる：

【定理 1.45】 (X,Y) をガウス型確率ベクトルとする[27]．このとき，任意の $n,m\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ に対して

$$\langle :X^n::Y^m:\rangle=n!\,\delta_{nm}\,\langle XY\rangle^n. \tag{1.109}$$

ただし，δ_{nm} はクロネッカーのデルタである．

証明 $a=\langle X^2\rangle$，$b=\langle Y^2\rangle$ とおく．(1.105) と命題 1.39 によって，任意の $z,w\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle :e^{zX}::e^{wY}:\right\rangle&=e^{-az^2/2}\,e^{-bz^2/2}\left\langle e^{zX+wY}\right\rangle\\&=e^{-az^2/2}\,e^{-bz^2/2}e^{\left\langle(zX+wY)^2\right\rangle/2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\left\langle :e^{zX}::e^{wY}:\right\rangle=e^{zw\langle XY\rangle}. \tag{1.110}$$

他方，定理 1.44-(iii) によって

$$\left\langle :e^{zX}::e^{wY}:\right\rangle=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\langle :X^n::Y^m:\rangle}{n!\,m!}z^nw^m$$

これと

$$e^{zw\langle XY\rangle}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle XY\rangle^n}{n!}z^nw^n$$

の展開係数を比較することにより，(1.109) が得られる． ∎

式 (1.109) は，$n\neq m$ に対して，$:X^n:$ と $:Y^m:$ がヒルベルト空間 $L^2(\Omega,dP)$ において直交することを示す．

[27] $X=Y$ の場合も含む．

次に k 個 $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_k$ の積に対してウィック積の概念を拡張する．k 個の非負整数の組 $(n_1, \cdots, n_k)$ に対して，k 個の実変数 $t_1, \cdots, t_k$ の連続微分可能な関数 $w_{n_1,\cdots,n_k}(t_1, \cdots, t_k)$ を次の漸化式によって定義する：

$$w_{0,\cdots,0}(t_1, \cdots, t_k) := 1, \tag{1.111}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_j} w_{n_1,\cdots,n_k}(t_1, \cdots, t_k) := \begin{cases} n_j w_{n_1,\cdots,\overset{j\text{ 番目}}{n_j - 1},\cdots,n_k}(t_1, \cdots, t_k) & n_j \neq 0 \\ 0 & n_j = 0 \end{cases}$$
$$(j = 1, \cdots, k), \tag{1.112}$$

$$\langle w_{n_1,\cdots,n_k}(X_1, \cdots, X_k) \rangle = 0, \quad n_1 + \cdots + n_k \geq 1. \tag{1.113}$$

関数 $w_{n_1,\cdots,n_k}$ が $t_1, \cdots, t_k$ に関する $(n_1 + \cdots + n_k)$ 次の多項式として一意的に定まることは，上の漸化式を用いて，$n_1, \cdots, n_k$ および k に関する帰納法により，証明することができる．この証明の概略は次のとおりである．

まず，1 変数のウィック積の結果により，$w_{0,\cdots,0,n_j,0,\cdots,0}(t_1, \cdots, t_k) =: t_j^{n_j} :$ (ただし，$\langle : X_j^{n_j} : \rangle = 0$)．次に，$w_{n_1,1}(t_1, t_2)$ を考え，漸化式から定まる微分方程式を解き，(1.113) を用いると，これは

$$w_{n_1,1}(t_1, t_2) =: t_1^{n_1} : t_2 + p_{n_1}(t_1, X_1, X_2)$$

という形に一意的に決まることがわかる．ただし，$p_{n_1}(t_1, X_1, X_2)$ は t_1 の n_1 次多項式である（係数は，X_1, X_2 のいろいろな積の期待値によっている）．同様に $w_{1,n_2}(t_1, t_2) =: t_2^{n_2} : t_1 + p_{n_2}(t_2, X_2, X_1)$ となる．したがって，特に，置換対称性

$$w_{n_1,1}(t_1, t_2) = w_{1,n_1}(t_2, t_1)$$

が成り立つ．ただし，$w_{1,n_1}(t_2, t_1)$ は，$w_{1,n_1}(t_1, t_2)$ において t_1 と t_2 および X_1 と X_2 を入れ換えたものである．これらの性質を用いると，$w_{n_1,2}(t_1, t_2)$ も t_1, t_2 に関して $(n_1 + 2)$ 次の多項式として一意的に定まることが示される．以下，同様の議論を繰り返すことにより，$w_{n_1,n_2}(t_1, t_2)$ は t_1, t_2 に関する $(n_1 + n_2)$ 次の多項式として一意的に定まること，および置換対称性（X_1 と X_2 の置換も含む）

$$w_{n_1,n_2}(t_1, t_2) = w_{n_2,n_1}(t_2, t_1)$$

が成り立つことが示される．最後に，$w_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(t_1,\cdots,t_k)$ が $t_1,\cdots,t_k$ に関して $(n_1+\cdots+n_k)$ 次の多項式として定まり，かつ置換対称性

$$w_{n_{\sigma(1)},\cdots,n_{\sigma(k)}}(t_{\sigma(1)},t_{\sigma(2)},\cdots,t_{\sigma(k)})=w_{n_1,\cdots,n_k}(t_1,\cdots,t_k),$$
$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_k\ （1,\cdots,k \text{ の置換の全体}）\quad(1.114)$$

（$X_1,\cdots,X_k$ の置換も含む）を満たすと仮定し，$w_{n_1,\cdots,n_k,\ell}(t_1,\cdots,t_{k+1})$ $(\ell=1,2,\cdots,n_{k+1})$ も同様の性質をもつことを示せばよい．

1 変数の場合のウィック多項式の拡張として，$w_{n_1,\cdots,n_k}$ を確率ベクトル $(X_1,\cdots,X_k)$ に付随する **k 変数ウィック多項式**と呼び，$\sum_{j=1}^k n_j$ をその次数という．これは，1 変数ウィック多項式の場合と同様に，基礎となる確率ベクトルに依存した概念であることに注意しよう（注意 1.41 を参照）．便宜上，0 次のウィック積は定数であると定義する．

以上の事実に基づいて

$$:X_1^{n_1}\cdots X_k^{n_k}:\ =w_{n_1,\cdots,n_k}(X_1,\cdots,X_k)\qquad(1.115)$$

という記号を導入し，これを確率ベクトル $(X_1,\cdots,X_k)$ の**ウィック積**と呼ぶ．非負整数 $(n_1+\cdots+n_k)$ をウィック積 $:X_1^{n_1}\cdots X_k^{n_k}:$ の次数という．

たとえば，2 次の次数のウィック積は次の式で与えられる：

$$:X_jX_\ell:\ =X_jX_\ell-\langle X_j\rangle X_\ell-\langle X_\ell\rangle X_j-\langle X_jX_\ell\rangle+2\langle X_j\rangle\langle X_\ell\rangle.\qquad(1.116)$$

(1.114) から，任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ に対して

$$:X_{\sigma(1)}^{n_{\sigma(1)}}\cdots X_{\sigma(k)}^{n_{\sigma(k)}}:\ =\ :X_1^{n_1}\cdots X_k^{n_k}:\qquad(1.117)$$

が成り立つ．

次の定理は，ウィック積が通常の多項展開を保存することを表すものであり，有用である[28]：

---

[28] これは決して自明なことではなく，証明を要することである（(1.118) の左辺は，$X_1,\cdots,X_k$ からつくられる 1 つの確率変数 $\sum_{j=1}^n c_jX_j$ ($c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\cdots,k$) の n 次のウィック積 $:\left(\sum_{j=1}^n c_jX_j\right)^n:$ であることに注意．

【定理 1.46】(多項定理) 任意の $k, n \in \mathbb{N}$ と任意の定数 $c_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \cdots, k)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&:\left(\sum_{j=1}^{k} c_j X_j\right)^n: \\
&= \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!} c_1^{m_1} \cdots c_k^{m_k} : X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k} : \quad (1.118)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，左辺は確率変数 $\sum_{j=1}^{k} c_j X_j$ の n 次のウィック積である．

証明 確率変数 $X := \sum_{j=1}^{k} c_j X_j$ に付随するウィック多項式 $: t^n :$ を $w_n(t)$ とし，$\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ の関数 $f_n(\mathbf{t}) := w_n\left(\sum_{j=1}^{k} c_j t_j\right)$ を考えると

$$f_n(X_1, \cdots, X_n) = : X^n :$$

である．容易にわかるように

$$f_0(\mathbf{t}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t_j} f_n(\mathbf{t}) = n c_j f_{n-1}(\mathbf{t}).$$

一方

$$g_n(\mathbf{t}) := \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!} c_1^{m_1} \cdots c_k^{m_k} w_{m_1,\cdots,m_k}(\mathbf{t})$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
&g_n(X_1, \cdots, X_k) \\
&\quad = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!} c_1^{m_1} \cdots c_k^{m_k} : X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k} :
\end{aligned}
$$

であり

$$g_0(\mathbf{t}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t_j} g_n(\mathbf{t}) = n c_j g_{n-1}(\mathbf{t})$$

が成り立つ．したがって，f_n と g_n は同じ漸化式を満たし，しかもこの漸化式は第 n 項を一意的に定めるので，$f_n(\mathbf{t}) = g_n(\mathbf{t})$, $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ が結論される．特に，$f_n(X_1, \cdots, X_k) = g_n(X_1, \cdots, X_k)$ であるので，(1.118) が成り立つ． ∎

次の定理は，定理 1.45 の多変数版である：

【定理 1.47】 $(X_1,\cdots,X_k,Y_1,\cdots,Y_\ell)$ $(k,\ell\geq 1)$ は $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 上のガウス型確率ベクトルとする．

(i)
$$\langle :X_1\cdots X_k:\ :Y_1\cdots Y_\ell:\rangle=\delta_{k\ell}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\left\langle X_1Y_{\sigma(1)}\right\rangle\cdots\left\langle X_kY_{\sigma(k)}\right\rangle. \tag{1.119}$$

(ii) $\langle X_iX_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\cdots,k)$ ならば，任意の $n_j,m_j\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ $(j=1,\cdots,k)$ に対して

$$\langle :X_1^{n_1}\cdots X_k^{n_k}:\ :X_1^{m_1}\cdots X_k^{m_k}:\rangle=\delta_{n_1m_1}\cdots\delta_{n_km_k}n_1!\cdots n_k!. \tag{1.120}$$

証明 (i) $c_i,d_j\in\mathbb{R}$ を任意にとり，$X:=\sum_{i=1}^k c_iX_i$, $Y:=\sum_{j=1}^\ell d_jY_j$ とおく．(1.118) より

$$\begin{aligned}\left\langle :X^k:\ :Y^\ell:\right\rangle=&\sum_{m_1+\cdots+m_k=k}\ \sum_{r_1+\cdots+r_\ell=\ell}\frac{k!\,\ell!}{m_1!\cdots m_k!\,r_1!\cdots r_\ell!}\\&\times\langle :X_1^{m_1}\cdots X_k^{m_k}:\ :Y_1^{r_1}\cdots Y_\ell^{r_\ell}:\rangle\,c_1^{m_1}\cdots c_k^{m_k}d_1^{r_1}\cdots d_\ell^{r_\ell}.\end{aligned} \tag{1.121}$$

一方，定理 1.45 によって（仮定と命題 1.39 により，(X,Y) はガウス型確率ベクトルになることに注意）

$$\begin{aligned}\left\langle :X^k:\ :Y^\ell:\right\rangle&=k!\,\delta_{k\ell}\,\langle XY\rangle^k\\&=k!\,\delta_{k\ell}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{k}\ \sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{k}c_{i_1}d_{j_1}\cdots c_{i_k}d_{j_k}\,\langle X_{i_1}Y_{j_1}\rangle\cdots\langle X_{i_k}Y_{j_k}\rangle.\end{aligned} \tag{1.122}$$

に等しい．そこで，(1.121) の右辺における $c_1c_2\cdots c_kd_1\cdots d_k$ の係数と (1.122) の右辺におけるそれを比較することにより，(1.119) が得られる．

(ii) (1.120) の左辺を

$$\Bigg\langle :\underbrace{X_1\cdots X_1}_{n_1\text{個}}\underbrace{X_2\cdots X_2}_{n_2\text{個}}\cdots\underbrace{X_k\cdots X_k}_{n_k\text{個}}:\ :\underbrace{X_1\cdots X_1}_{m_1\text{個}}\underbrace{X_2\cdots X_2}_{m_2\text{個}}\cdots\underbrace{X_k\cdots X_k}_{m_k\text{個}}:\Bigg\rangle$$

と変形し，(1.119) を応用すればよい．■

【定理 1.48】 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(X_1, \cdots, X_n)$ は $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上のガウス型確率ベクトルであるとする．このとき，次の漸化式が成り立つ：

$$:X_1 X_2 := X_1 X_2 - \langle X_1 X_2 \rangle, \tag{1.123}$$

$$:X_1 \cdots X_n := X_1 : X_2 \cdots X_n : - \sum_{j=2}^{n} \langle X_1 X_j \rangle : X_2 \cdots \hat{X}_j \cdots X_n :, \quad n \geq 3. \tag{1.124}$$

ただし，$\hat{X}_j$ は X_j を除くことを表す．

証明 (1.123) は (1.116) と $\langle X_j \rangle = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ による．$n \geq 3$ とし，$\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(\mathbf{t}) := :e^{i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j}:$ とおけば，定理 1.46 により

$$\frac{\partial^n f(0)}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} = i^n : X_1 \cdots X_n : .$$

一方，$Y := \sum_{j=2}^{n} t_j X_j$ とおけば

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= e^{\langle (t_1 X_1 + Y)^2 \rangle / 2} e^{i t_1 X_1} e^{iY} = e^{t_1 \langle X_1 Y \rangle} : e^{i t_1 X_1} :: e^{iY} : \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^m i^\ell}{n!\, m!\, \ell!} t_1^{n+m} \langle X_1 Y \rangle^n : X_1^m :: Y^\ell : . \end{aligned}$$

したがって，$\partial^n f(0)/\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n$ において残る項は，右辺の級数で $n + m = 1$ を満たす項の中から得られる．すなわち

$$i t_1 X_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^\ell}{\ell!} : Y^\ell : + t_1 \langle X_1 Y \rangle \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^\ell}{\ell!} : Y^\ell :$$

である．この式を見ると，第 1 項で残るのは

$$i t_1 X_1 i^{n-1} t_2 \cdots t_n : X_2 \cdots X_n :$$

の部分であり，第 2 項で残るのは

$$t_1 t_j \sum_{j=2}^{n} \langle X_1 X_j \rangle i^{n-2} t_2 \cdots \hat{t}_j \cdots t_n : X_2 \cdots \hat{X}_j \cdots X_n :$$

であることがわかる．したがって

$$\frac{\partial^n f(0)}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} = i^n X_1 : X_2 \cdots X_n : - i^n \sum_{j=2}^{n} \langle X_1 X_j \rangle : X_2 \cdots \hat{X}_j \cdots X_n : .$$

ゆえに (1.124) が成立する. ∎

関連図書

[1] 飛田武幸,『ブラウン運動』, 岩波書店, 1975.

[2] 伊藤 清,『確率論』, 岩波書店, 1991.

[3] 伊藤清三,『ルベーグ積分入門 第 12 版』, 裳華房, 1974.

[4] 掛下伸一,『確率論』, サイエンス社, 1973.

[5] コルモゴロフ,『確率論の基礎概念 (第二版)』(根本伸司 訳), 東京図書, 1975.

[6] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[7] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[8] 保江邦夫,『数理物理学方法序説 4 確率論』, 日本評論社, 2001.

第2章

確率過程

2.1 確率過程の一般概念

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{I}$ を空でない集合とする．各 $\alpha \in \mathfrak{I}$ に対して，d 次元確率ベクトル $X_\alpha : \Omega \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^d$ が付随するとき，$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{I}}$ を **$\mathfrak{I}$ を添え字集合とする d 次元確率過程** (stochastic process, random process) あるいは単に **$\mathfrak{I}$ を添え字集合とする確率過程**と呼ぶ．これは“パラメータ”$\alpha \in \mathfrak{I}$ の値に応じて変化する確率的事象を記述するための概念である[1]．Ω の点 ω を任意に固定するとき，$\xi_\omega(\alpha) := X_\alpha(\omega)$, $\forall \alpha \in \mathfrak{I}$, によって，$\mathfrak{I}$ から $\mathbb{R}^d$ への写像 ξ_ω が定まる．写像 ξ_ω を確率過程 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{I}}$ における（1つの）**標本関数** (sample function) または**標本経路** (sample path) という．たとえば，$\mathfrak{I} = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ で $\xi_\omega(t)$ が t に関して連続であるならば，ξ_ω は $\mathbb{R}^d$ 内の曲線を与える．

確率過程の存在に関する一般的・基本的事実については付録Dでふれる．この章では，実ヒルベルト空間を添え字集合とする確率過程について考察する．

---

[1] たとえば，非常に細かくばらばらにした花粉の1つが水の中を運動する場合．そのような運動においては，粒子（花粉粒子）の時刻 t での位置 $X(t) \in \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ は確率的に分布する．したがって，$X(t)$ は，ある確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の d 次元確率ベクトルとみなすのが自然である．この場合，考察下の運動は d 次元確率ベクトルの集合 $\{X(t)\}_{t \in [a,b]}$ （$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であり，閉区間 $[a, b]$ は運動の観測を行う時間区間を表す）によって記述されると予想される．これは $\mathfrak{I} = [a, b]$ の場合の確率過程の例を与える（上の記号に合わせるならば，$X_t = X(t)$ とすればよい）．この枠組みでは，いうまでもなく，粒子の時刻 t での位置については確率的に予言できるだけである．すなわち，粒子が時刻 t で集合 $B \in \mathfrak{B}^d$ の中にある確率は $P(\{\omega \in \Omega | X(t)(\omega) \in B\})$ （$X(t)(\omega) \in \mathbb{R}^d$ は $X(t)$ の ω における値）であると解釈するのである．ここで触れた種類の運動は，その発見者ブラウン（Robert Brown, 1773〜1858，イギリスの植物学者）にちなんで**ブラウン運動**と呼ばれる．

2.2 実ヒルベルト空間を添え字集合とする確率過程

$\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間とし，その内積とノルムをそれぞれ，$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$\|\cdot\|$ で表す．まず，$\mathbb{R}^d$ 上の正型関数の概念を一般化する．

【定義 2.1】 $\mathcal{H}$ 上の関数 χ : $\mathcal{H}\to\mathbb{C}$; $\mathcal{H}\ni f\mapsto\chi(f)\in\mathbb{C}$ が各 $N\in\mathbb{N}$ と任意の $f_n\in\mathcal{H}$, $z_n\in\mathbb{C}$ $(n=1,\cdots,N)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^{N}\chi(f_n-f_m)z_n^*z_m\geq 0 \tag{2.1}$$

を満たすとき，χ を $\mathcal{H}$ 上の**正型汎関数**または**正定符号汎関数**と呼ぶ．

命題 1.31 とまったく同様にして，次の命題を証明することができる：

【命題 2.2】 χ を $\mathcal{H}$ 上の正型汎関数とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する：

(i) $$\chi(0)\geq 0.$$

(ii) $$\chi(f)=\chi(-f)^*,\quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

(iii) $$|\chi(f)|\leq\chi(0),\quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

■**例 2.3**　実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は可分であるとし，A を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とする[2]．さらに，A は非負（すなわち，$\langle\psi,A\psi\rangle\geq 0,\forall\psi\in\mathcal{H}$；この場合，$A\geq 0$ と記す）であるとしよう．このとき

$$\chi_A(f):=e^{-\langle f,Af\rangle},\quad f\in\mathcal{H} \tag{2.2}$$

によって定義される汎関数 $\chi_A:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ は正型である．

証明　$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 (CONS) とし，$\{e_1,\cdots,e_N\}$ によって生成される N 次元部分空間 $\mathcal{H}_N:=\mathcal{L}(\{e_1,\cdots,e_N\})$ への正射影作用素を P_N とする．よく知られているように，$\iota_N:\mathcal{H}_N\to\mathbb{R}^N$ を

$$\iota_N(f):=(\langle e_1,f\rangle,\cdots,\langle e_N,f\rangle),\quad f\in\mathcal{H}_N$$

[2] 本書において，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の線形作用素 T が有界であるというとき，特に断らないかぎり，その定義域 $D(T)$ は $\mathcal{K}$ 全体であるとする（定義域がヒルベルト空間全体でない有界線形作用素を考察する場合には，その都度，定義域に言及する）．

とすれば，これは同型写像（ユニタリ変換）である．そこで，関数 $\varphi^{(N)}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ を $\varphi^{(N)}(k):=\chi_A\bigl(\iota_N^{-1}(k)\bigr)=\chi_A\bigl(\sum_{n=1}^N k_ne_n\bigr)$ によって定義すれば

$$\varphi^{(N)}(k)=e^{-\sum_{n,m=1}^N A_{nm}^{(N)}k_nk_m}$$

となる．ただし，$A_{nm}^{(N)}:=\langle e_n,Ae_m\rangle$．行列 $A^{(N)}=(A_{nm})_{n,m=1,\cdots,N}$ は非負の実対称行列である．したがって，例 1.30（$d=N,S=A^{(N)}$ として応用）によって，$\varphi^{(N)}$ は正型である．これから，写像：$f\mapsto\chi_A(P_Nf)$ は正型になることがわかる．実際，各 $M\in\mathbb{N}$ と任意の $f_n\in\mathcal{H}$, $n=1,\cdots,M$ に対して，$\iota_N(P_Nf_n)=k_n\in\mathbb{R}^N$ とすれば，すべての $z_n\in\mathbb{C}$ $(n=1,\cdots,M)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^M\chi_A(P_Nf_n-P_Nf_m)z_n^*z_m=\sum_{n,m=1}^M\varphi^{(N)}(k_n-k_m)z_n^*z_m\geq 0.$$

他方，A は有界で，$\lim_{N\to\infty}P_Nf=f$, $f\in\mathcal{H}$ であるから

$$\lim_{N\to\infty}\langle P_Nf,AP_Ng\rangle=\langle f,Ag\rangle,\ \ f,g\in\mathcal{H}$$

である．したがって，特に，$\lim_{N\to\infty}\chi_A(P_Nf)=\chi_A(f)$．そこで，不等式

$$\sum_{n,m=1}^M\chi_A(P_Nf_n-P_Nf_m)z_n^*z_m\geq 0$$

において，$N\to\infty$ とすれば，$\sum_{n,m=1}^M\chi_A(f_n-f_m)z_n^*z_m\geq 0$ が得られる．したがって，χ_A は正型である． ■

$\mathbb{R}$ の 1 点コンパクト化を $\dot{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ とすると，チコノフの定理により，$\mathbb{N}$ を添え字集合とするその無限直積

$$Q:=\dot{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}=\{\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid\omega_n\in\dot{\mathbb{R}},n\in\mathbb{N}\}\tag{2.3}$$

はコンパクト・ハウスドルフ空間である．Q のボレル集合体（Q の開集合全体を含む最小の σ 加法族）を $\mathfrak{B}_Q$ で表す（付録 D，D.1 節を参照）．各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，Q 上の実数値関数 q_n を

$$q_n(\omega):=\begin{cases}\omega_n & ;\ \omega_n\neq\infty\ \text{のとき}\\ 0 & ;\ \omega_n=\infty\ \text{のとき}\end{cases}\tag{2.4}$$

によって定義する．容易にわかるように，q_n はボレル可測である．

$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間，$E := \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の任意の完全正規直交系 (CONS) とし

$$\mathcal{D}_E := \mathcal{L}(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \quad (\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ によって生成される部分空間}) \tag{2.5}$$

とおく．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の完全性により，$\mathcal{D}_E$ は $\mathcal{H}$ で稠密である．任意の $f \in \mathcal{D}_E$ に対して，自然数 N_f があって $f = \sum_{n=1}^{N_f} \langle e_n, f\rangle e_n$ と一意的に表される．そこで，Q 上の実数値関数 $F(f)$ を

$$F(f) := \sum_{n=1}^{N_f} \langle e_n, f\rangle q_n \tag{2.6}$$

によって定義する．すなわち

$$F(f)(\omega) = \sum_{n=1}^{N_f} \langle e_n, f\rangle q_n(\omega), \quad \omega \in Q. \tag{2.7}$$

したがって，特に

$$F(e_n) = q_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

が成り立つ．

次の定理は，$\mathbb{R}^d$ 上の正型関数に関するボッホナーの定理（定理 1.32）の無限次元版の 1 つを与える：

【定理 2.4】 χ を $\mathcal{H}$ 上の正型汎関数で次の 2 つの条件を満たすものとする：

(χ.1)　　$\chi(0) = 1.$

(χ.2)（連続性）対応：$f \mapsto \chi(f)$ は連続である．すなわち，$f_n, f \in \mathcal{H}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ならば $\lim_{n\to\infty} \chi(f_n) = \chi(f)$ が成り立つ．

このとき，$(Q, \mathfrak{B}_Q)$ 上の確率測度 μ がただ 1 つ存在して

$$\chi(f) = \int_Q e^{iF(f)} d\mu, \quad f \in \mathcal{D}_E \tag{2.9}$$

が成り立つ．

証明　各 $(i_1, \cdots, i_N) \in \mathbb{N}^N$ に対して，$\mathbb{R}^N$ 上の関数 $\chi_{i_1,\cdots,i_N}$ を

$$\chi_{i_1,\cdots,i_N}(\mathbf{t}) := \chi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n e_{i_n}\right), \quad \mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_N) \in \mathbb{R}^N$$

によって定義する．条件 $(\chi.2)$ によって，$\chi_{i_1,\cdots,i_N}$ は連続である．また，条件 $(\chi.1)$ により，$\chi_{i_1,\cdots,i_N}(0)=1$．さらに，$\chi$ の正型性により，$\chi_{i_1,\cdots,i_N}$ は正型である．したがって，ボッホナーの定理によって，$(\mathbb{R}^N,\mathfrak{B}^N)$ 上の確率測度 $\mu_{i_1,\cdots,i_N}$ で

$$\chi_{i_1,\cdots,i_N}(\mathbf{t})=\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_j}\,d\mu_{i_1,\cdots,i_N}(\mathbf{x})$$

を満足するものがただ 1 つ存在する．$1,\cdots,N$ の任意の置換 σ に対して，$\mathbf{t}_\sigma:=(t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(N)})$ とおくと

$$\begin{aligned}\chi_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(\mathbf{t}_\sigma)&=\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_{\sigma(j)}x_j}\,d\mu_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(\mathbf{x})\\&=\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_{\sigma^{-1}(j)}}\,d\mu_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}.\end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned}\chi_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(\mathbf{t}_\sigma)&=\chi\left(\sum_{j=1}^N t_{\sigma(j)}\,e_{i_{\sigma(j)}}\right)=\chi\left(\sum_{j=1}^N t_j\,e_{i_j}\right)\\&=\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_j}\,d\mu_{i_1,\cdots,i_N}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_{\sigma^{-1}(j)}}\,d\mu_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_j}\,d\mu_{i_1,\cdots,i_N}(\mathbf{x})$$

$\mathbb{R}^N$ 上の確率測度 ν を

$$\begin{aligned}&\nu(B):=\mu_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(B^{(\sigma)}),\\&\qquad B\in\mathfrak{B}^N,\ B^{(\sigma)}:=\{(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(N)})|(x_1,\cdots,x_N)\in B\}\end{aligned}$$

によって定義すれば，上式の左辺は $\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\sum_{j=1}^N t_jx_j}\,d\nu$ と書ける．したがって，定理 1.25 により，$\nu=\mu_{i_1,\cdots,i_N}$．特に

$$\begin{aligned}&\mu_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(N)}}(B_{\sigma(1)}\times\cdots\times B_{\sigma(N)})=\mu_{i_1,\cdots,i_N}(B_1\times\cdots\times B_N),\\&\qquad\qquad B_j\in\mathfrak{B}^1,\ j=1,\cdots,N\end{aligned}$$

が成り立つ．$n<m$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の確率測度を $\rho_{m,n}(B):=\mu_{i_1,\cdots,i_m}(B\times\mathbb{R}^{m-n})$, $B\in\mathfrak{B}^n$ によって定義すれば

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n t_jx_j}\,d\rho_{m,n}(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n t_jx_j}\,d\mu_{i_1,\cdots,i_n}(\mathbf{x}),\\&\qquad\qquad t_j\in\mathbb{R},\ j=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

したがって，$\rho_{m,n} = \mu_{i_1,\cdots,i_n}$．よって，確率測度の族 $\{\mu_{i_1,\cdots,i_N} \mid N \in \mathbb{N}, i_j \in \mathbb{N}, j = 1,\cdots,N\}$ は整合的である．ゆえに，コルモゴロフの定理（付録 D，定理 D.7）により，$(Q, \mathfrak{B}_Q)$ 上の確率測度 μ がただ 1 つ存在して，各 $N \in \mathbb{N}$ と各 $(i_1,\cdots,i_N) \in \mathbb{N}^N$ に対して，確率ベクトル $(q_{i_1},\cdots,q_{i_N})$ の結合分布は $\mu_{i_1,\cdots,i_N}$ に等しい．したがって

$$\chi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n e_n\right) = \int_Q e^{i\sum_{n=1}^{N} t_n q_n}\, d\mu, \quad t_n \in \mathbb{R},\ n = 1,\cdots,N. \tag{2.10}$$

任意の $f \in \mathcal{D}_E$ に対して，$N = N_f$, $t_n = \langle e_n, f\rangle$ ととれば，(2.9) が得られる．

■

定理 2.4 の仮定にある条件を付加するならば，$F(f)$ を任意の $f \in \mathcal{H}$ に拡張することができ，(2.9) を任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して成立せしめることができる．これを述べたのが次の定理である：

【定理 2.5】　定理 2.4 の仮定に加えて，次の条件 $(\chi.3)$, $(\chi.4)$ も満たされるとする:

$(\chi.3)$ 各 $N \in \mathbb{N}$ と任意の $f_1,\cdots,f_N \in \mathcal{H}$ に対して $\chi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n f_n\right)$（$t_n \in \mathbb{R}$, $n = 1,\cdots,N$）は N 個の実変数 $t_1,\cdots,t_N$ の関数として 2 回連続微分可能である．

$(\chi.4)$ すべての $f \in \mathcal{H}$ に対して 2 重級数

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left.\frac{\partial^2 \chi(t_n e_n + t_m(1-\delta_{nm})e_m)}{\partial t_n \partial t_m}\right|_{t_n=t_m=0} \langle e_n, f\rangle \langle e_m, f\rangle \tag{2.11}$$

は収束する．

このとき，$(Q, \mathfrak{B}_Q)$ 上の確率測度 μ と $(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ 上の確率変数の族 $\{\phi_E(f) | f \in \mathcal{H}\}$ が存在して次の性質 (i)〜(iv) が成立する：

(i)
$$\phi_E(f) = F(f), \quad \forall f \in \mathcal{D}_E.$$

(ii)
$$\chi(f) = \int_Q e^{i\phi_E(f)} d\mu, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.12}$$

(iii)
$$\phi_E(f) \in L^2(Q, d\mu), \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.13}$$

(iv)（実線形性）すべての $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{H}$ に対して

$$\phi_E(af + bg) = a\phi_E(f) + b\phi_E(g), \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明　(2.8) によって, (2.9) は, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して確率ベクトル $(q_1, \cdots, q_N)$ の特性関数（変数を $t_1, \cdots, t_N \in \mathbb{R}$ とする）が $\chi\left(\sum_{n=1}^N t_n q_n\right)$ に等しいことを示している．したがって，条件 $(\chi.3)$ と定理 1.36-(ii) は

$$\int_Q |q_n q_m| d\mu < \infty, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{2.14}$$

かつ

$$\left.\frac{\partial^2 \chi(t_n e_n + t_m(1 - \delta_{nm})e_m)}{\partial t_n \partial t_m}\right|_{t_n = t_m = 0} = -\int_Q q_n q_m \, d\mu \tag{2.15}$$

を導く．

各 $f \in \mathcal{H}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_N := \sum_{n=1}^N \langle e_n, f \rangle \, e_n$$

とすれば, $\lim_{N\to\infty} f_N = f$ である．よって, 条件 $(\chi.2)$ により, $\lim_{N\to\infty} \chi(f_N) = \chi(f)$．これと (2.9) から

$$\chi(f) = \lim_{N\to\infty} \int_Q e^{i\phi^{(N)}(f)} \, d\mu \tag{2.16}$$

を得る．ただし，$\phi^{(N)}$ は $\phi^{(N)}(f) := \sum_{n=1}^N \langle e_n, f \rangle \, q_n$ によって定義される Q 上の実数値関数である．$\{\phi^{(N)}(f)\}_N$ が $L^2(Q, d\mu)$ 上のコーシー列であることを示そう．実際，$N, M \in \mathbb{N}$, $N > M$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left|\phi^{(N)}(f) - \phi^{(M)}(f)\right|^2 d\mu \\
&= \sum_{n,m=M+1}^N \langle e_n, f \rangle \langle e_m, f \rangle \int_Q q_n q_m \, d\mu \\
&= -\sum_{n,m=M+1}^N \left.\frac{\partial^2 \chi(t_n e_n + t_m(1 - \delta_{nm})e_m)}{\partial t_n \partial t_m}\right|_{t_n = t_m = 0} \langle e_n, f \rangle \langle e_m, f \rangle \\
&\hspace{20em} (\because (2.15)) \\
&\to 0 \ (N, M \to \infty) \quad (\because \text{条件 } (\chi.4)).
\end{aligned}$$

したがって，$L^2(Q, d\mu)$ において

$$\phi_E(f) := \lim_{N\to\infty} \phi^{(N)}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, f\rangle\, q_n \tag{2.17}$$

が存在する．もし，$f \in \mathcal{D}_E$ ならば，右辺の和は有限項の和であるので (i) が成り立つことになる．

容易に証明される不等式

$$|e^{ix} - e^{iy}| \le |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\left|\int_Q e^{i\phi^{(N)}(f)} d\mu - \int_Q e^{i\phi_E(f)}\, d\mu\right| \\
&\le \int_Q |\phi^{(N)}(f) - \phi_E(f)|\, d\mu \\
&\le \left(\int_Q 1^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_Q |\phi^{(N)}(f) - \phi_E(f)|^2 d\mu\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad (\because \text{積分に関するシュヴァルツの不等式}) \\
&= \left(\int_Q |\phi^{(N)}(f) - \phi_E(f)|^2\, d\mu\right)^{1/2} \quad (\because \mu(Q) = 1) \\
&\to 0 \ (N \to \infty).
\end{aligned}$$

これと (2.16) により，(2.12) が得られる．(2.17) によって，$L^2(Q, d\mu)$ における等式として，$\phi_E(af + bgt) = a\phi_E(f) + b\phi_E(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{H}$ が成り立つことは容易にわかる．したがって，性質 (iv) が成立する． ∎

✶注意 2.6　仮定の条件を若干変えることにより，定理 2.5 は別の定式化が可能である（付録 D，定理 D.18 を参照）．

一般に，確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数の族 $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ ($\mathcal{I}$ は添え字集合）に対して，集合族 $\{f_\alpha^{-1}((a, \infty)) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ($\subset \mathfrak{B}$) を含む最小の σ 加法族を **$\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ によって生成される σ 加法族**という．

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率変数の族 $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ によって生成される σ 加法族が $\mathfrak{B}$ に等しいとき，$\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ は**フル** (full) であるという．

$\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ によって生成される σ 加法族を Σ_Q としよう．このとき，次の命題が成り立つ：

【命題 2.7】　定理 2.5 の仮定のもとで，確率空間 (Q, Σ_Q, μ) 上の確率変数の族 $\{\phi_E(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ はフルである．

証明　$\{\phi_E(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ によって生成される σ 加法族を Σ とするとき，$\Sigma = \Sigma_Q$ を示せばよい．まず，$\Sigma_Q \subset \Sigma$ は明らかである（$\because\ \phi_E(e_n) = q_n$）．他方，(2.17) によって，$\phi_E(f)$ は Σ_Q-可測である．したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\phi_E(f)^{-1}((a, \infty)) \in \Sigma_Q$．これは $\Sigma \subset \Sigma_Q$ を意味する．∎

定理 2.5 において構成された確率変数の族 $\{\phi_E(f)\}_{f\in\mathcal{H}}$ は，実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を添え字集合とする確率過程とみることができる．しかも，(iv) の性質によって，μ-a.e.$\omega \in Q$ ごとに，対応 : $f \mapsto \phi_E(f)(\omega) \in \mathbb{R}$ は $\mathcal{H}$ 上の線形汎関数である．そこで，この型の確率過程の一般概念を定義しておく．

【定義 2.8】　$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$\mathcal{V}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$\mathcal{V}$ を添え字集合とする確率過程 $\{S(f)\}_{f\in\mathcal{V}}$ が確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上に実現されているとする．この確率過程がすべての $a, b \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{V}$ に対して $S(af + bg) = aS(f) + bS(g)$ P-a.e.（線形性）を満たすならば，$\{S(f)\}_{f\in\mathcal{V}}$ を $\mathcal{V}$ に付随する**確率超過程**と呼ぶ．

この定義では，$\mathcal{V}$ の位相については何も言及していないが，$\mathcal{V}$ がもちうる可能な種々の位相を含めて考察することにより，より豊穣な理論が展開されうる．

2.3　確率変数のフル性から導かれる基本的性質

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を確率空間とし，$\mathsf{X}_{\mathcal{I}} := \{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ をこの確率空間上の確率変数の族とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数全体のなす空間を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $\alpha_j \in \mathcal{I}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，Ω 上の $\mathfrak{B}$-可測関数 $f(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})$ を

$$f(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})(\omega) := f(X_{\alpha_1}(\omega), \cdots, X_{\alpha_n}(\omega)), \quad P\text{-a.e.} \tag{2.19}$$

によって定義できる．このような型の関数の全体を $\mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathcal{I}})$ とする：

$$\mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathcal{I}}) := \{f(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n}) \mid n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \alpha_j \in \mathcal{I},\ j = 1, \cdots, n\}. \tag{2.20}$$

一般に, 測度空間 (M, Σ, μ) 上の μ-a.e. 有限な可測関数 F に対して, (M, Σ, μ) 上の 2 乗可積分関数の同値類から形成されるヒルベルト空間 $L^2(M, d\mu) := L^2(M, \Sigma, d\mu)$ 上で作用する，関数 F による掛算作用素を M_F で表す（その定義域を $D(M_F)$ と記す）：

$$D(M_F) := \left\{ \psi \in L^2(M, d\mu) \;\middle|\; \int_M |F(m)|^2 |\psi(m)|^2 \, d\mu(m) < \infty \right\}, \quad (2.21)$$

$$(M_F \psi)(m) := F(m)\psi(m), \quad \mu\text{-a.e.}m. \quad (2.22)$$

F が本質的に有界ならば，$D(M_F) = L^2(M, d\mu)$ であり，M_F は有界である．

一般にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への有界線形作用素全体のなすバナッハ空間を $\mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ で表す．特に $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) := \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ と記す．

$\mathfrak{A}(\mathsf{X}_\mathfrak{J})$ の任意の元 F に対して $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ 上の有界な掛算作用素 M_F が定まる．そこで

$$\hat{\mathfrak{A}}(\mathsf{X}_\mathfrak{J}) := \{ M_F \mid F \in \mathfrak{A}(\mathsf{X}_\mathfrak{J}) \} \quad (2.23)$$

とおき，$\hat{\mathfrak{A}}(\mathsf{X}_\mathfrak{J})$ の元の強極限の全体を $\hat{\mathfrak{A}}_\mathrm{S}(\mathsf{X}_\mathfrak{J})$ で表す．すなわち

$$\hat{\mathfrak{A}}_\mathrm{S}(\mathsf{X}_\mathfrak{J}) := \left\{ A \in \mathfrak{B}(L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \hat{\mathfrak{A}}(\mathsf{X}_\mathfrak{J}) \text{ の元からなる有向点族} \\ \{A_\lambda\}_\lambda \text{ があって } \mathrm{s\text{-}lim}\, A_\lambda = A \end{array} \right\}. \quad (2.24)$$

ただし，s- lim は強極限を表す[3]．

次の事実に注意する：

【定理 2.9】 (M, Σ, μ) を σ-有限な測度空間とする．このとき，(M, Σ, μ) 上の本質的に有界な関数による掛算作用素の強極限は本質的に有界な関数による掛算作用素である．

証明 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ を (M, Σ, μ) 上の本質的に有界な関数の列とし, $\mathrm{s\text{-}lim}_{n\to\infty} M_{F_n} = T \in \mathfrak{B}(L^2(M, d\mu))$ としよう．このとき, L^2 収束に関する一般的事実により, 任意の $\psi \in L^2(M, d\mu)$ に対して，部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ があって $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(m)\psi(m) = (T\psi)(m)$ (μ-a.e.m) が成り立つ．(M, Σ, μ) は σ-有限であるから，Σ-可測集合の列 $\{M_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ で

$$M = \bigcup_{\ell=1}^\infty M_\ell, \quad \mu(M_\ell) < \infty, \quad M_\ell \cap M_k = \emptyset, \ \ell \neq k$$

[3] 付録 C，C.2 節を参照．

を満たすものが存在する．任意の $\ell \geq 1$ に対して，$\chi_{M_\ell} \in L^2(M, d\mu)$ であるから

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(m) = (T\chi_{M_\ell})(m), \quad \mu\text{-a.e.}m \in M_\ell$$

となる．そこで，$F := \sum_{\ell=1}^{\infty} \chi_{M_\ell} \cdot T\chi_{M_\ell}$ とすれば，$T\psi = F\psi, \forall\psi \in L^2(M, d\mu)$ が成り立つ．したがって，$T = M_F$ である．仮に，F が本質的に有界でないとすれば，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mu(\{m \in M \| F(m) | \ \geq n\}) > 0$ が成り立つ．一方，$\|F\psi\|^2 \leq \|T\|^2\|\psi\|^2$ であるから，$\psi = \chi_{\{m\in M||F(m)|\geq n\}\cap M_\ell} \in L^2(M, d\mu)$ ととれば，$n^2 \leq \|T\|^2$ が得られる．$n \in \mathbb{N}$ は任意であったからこれは矛盾である．したがって，F は本質的に有界である． ∎

定理 2.9 の応用により，$\hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}})$ の任意の元は有界な掛算作用素であり，$\hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}})$ は強位相で閉じている．

(M, Σ, μ) 上の本質的に有界な可測関数の全体を $L^\infty(M, \Sigma, d\mu)$ で表し

$$\hat{L}^\infty(M, \Sigma, d\mu) := \{M_f \mid f \in L^\infty(M, \Sigma, d\mu)\} \tag{2.25}$$

とおく．

【定理 2.10】 $\mathsf{X}_{\mathfrak{J}}$ がフルならば次の (i)〜(iii) が成立する：

(i)
$$\hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}}) = \hat{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP). \tag{2.26}$$

(ii) $\mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}})$ は $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ で稠密である．

(iii) $e^{it_1 X_{\alpha_1}} \cdots e^{it_n X_{\alpha_n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \in \mathfrak{J}$ $(j = 1, \cdots, n)$ によって生成される部分空間

$$\mathcal{W}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}}) := \mathcal{L}(\{e^{it_1 X_{\alpha_1}} \cdots e^{it_n X_{\alpha_n}} \mid n \in \mathbb{N},\ t_j \in \mathbb{R},\ \alpha_j \in \mathfrak{J},\ j = 1, \cdots, n\}) \tag{2.27}$$

は $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ で稠密である．

証明 (i) 上述したことから

$$\hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}}) \subset \hat{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP) \tag{2.28}$$

は明らかである．逆の包含関係を示すために，$\hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathfrak{J}})$ に属する正射影作用素の全体を $\mathfrak{P}$ とする．任意の $P \in \mathfrak{P}$ は掛算作用素であるから，ある可測集合

$A_P \in \mathfrak{B}$ があって P は A_P の定義関数 χ_{A_P} による掛算作用素として表される．このとき，集合族 $\{A_P \mid P \in \mathfrak{P}\}$ を含む最小の σ 加法族を $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ とすれば，明らかに，$\Sigma_{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{B}$ である．各確率変数 X_α が $\Sigma_{\mathfrak{P}}$-可測であることを示すために，任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して

$$A := \{\omega \in \Omega \mid a < X_\alpha(\omega) \le b\}$$

とする．関数空間論におけるよく知られた事実の応用により，$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ で $|f_n(x)| \le 1$, $n \ge 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{(a,b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ を満たすものがとれる．したがって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X_\alpha(\omega)) = \chi_{(a,b]}(X_\alpha(\omega)) = \chi_A(\omega), \quad P\text{-a.e.}\omega.$$

これと f_n の有界性を使えば，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} M_{f_n(X_\alpha)} = M_{\chi_A}$ がわかる．したがって，$A \in \Sigma_{\mathfrak{P}}$．ゆえに，$X_\alpha$ は $\Sigma_{\mathfrak{P}}$-可測である．これと仮定––$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ の $\mathfrak{B}$ に関するフル性––によって，$\Sigma_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}$ が結論される．

さて，$F \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ を任意にとる．このとき，F は $\mathfrak{B} = \Sigma_{\mathfrak{P}}$ に属する集合の定義関数の有限線形結合––F_n としよう––の各点ごとの極限として表される．この場合，F の本質的有界性により，定数 $C > 0$ があって，$|F_n(\omega)| \le C$ (P-a.e.ω) となるように F_n をとることができる．したがって，ルベーグの優収束定理を使うことにより，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} M_{F_n} = M_F$．$M_{F_n} \in \hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ であるから，$M_F \in \hat{\mathfrak{A}}_{\mathrm{S}}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$．したがって，(2.28) の逆の包含関係が成立する．

(ii) $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ は $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ で稠密である．したがって，$\mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ が $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ の位相で $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ で稠密であることを示せばよい．これは次のようにしてなされる．任意の $F \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ に対して，(2.26) および「$1 \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$」によって，関数列 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$，$F_n \in \mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ があって $\lim_{n\to\infty} \|F_n 1 - F1\| = 0$ となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$.

(iii) (ii) の事実があるので，$\mathcal{W}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ が，$L^2(\Omega, \mathfrak{B}, dP)$ の位相に関して，$\mathfrak{A}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ で稠密であることを示せばよい．それには，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ および任意の $X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n}$ に対して $F := f(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})$ が $\mathcal{W}(\mathsf{X}_{\mathcal{J}})$ の元によって（L^2 収束の意味で）近似できればよい．f のフーリエ変換を $\hat{f}$ とし，$R > 0$ に対して $f_R(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{|x_j| \le R,\ j=1,\cdots,n} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$ とすれば

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} f_R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

よく知られているように，$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ である．また，$|f_R(x)| \le (2\pi)^{-n/2}\|\hat{f}\|_{L^1}$．したがって，$F_R := f_R(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})$ とおけば，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{R\to\infty} \|F_R - F\|_{L^2(\Omega,dP)} = 0$$

となる．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $R_0 > 0$ があって，$R \ge R_0$ ならば $\|F_R - F\|_{L^2(\Omega,dP)} < \varepsilon$ が成り立つ．他方

$$F_R = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x_j|\le R,\ j=1,\cdots,n} \hat{f}(k)\, e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{\alpha_j}}\, dk$$

であるから，右辺の積分のリーマン近似和を考えることにより，$\mathcal{W}(\mathsf{X}_\mathsf{J})$ の元の列 $\{g_\ell^{(R)}\}_{\ell=1}^\infty$ で $\lim_{\ell\to\infty} \|g_\ell^{(R)} - F_R\|_{L^2(\Omega,dP)} = 0$ となるものが存在することがわかる．すなわち，自然数 ℓ_0 が存在して，$\ell \ge \ell_0$ ならば，$\|g_\ell^{(R_0)} - F_{R_0}\|_{L^2(\Omega,dP)} < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，$\ell \ge \ell_0$ ならば

$$\begin{aligned}\|g_\ell^{(R_0)} - F\|_{L^2(\Omega,dP)} &\le \|g_\ell^{(R_0)} - F_{R_0}\|_{L^2(\Omega,dP)} + \|F_{R_0} - F\|_{L^2(\Omega,dP)} \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

これは示すべき事実を意味する． ■

【定理 2.11】 $\phi_E(f), f \in \mathcal{H}$ を定理 2.5 のものとする．このとき，$\mathcal{L}(\{e^{i\phi_E(f)} | f \in \mathcal{H}\})$ は $L^2(Q, \Sigma_Q, d\mu)$ で稠密である．

証明 命題 2.7 と定理 2.10-(iii) によって，$\mathcal{L}(\{e^{it_1\phi_E(f_1)} \cdots e^{it_n\phi_E(f_n)} \mid n \in \mathbb{N}, t_j \in \mathbb{R}, f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n\})$ は $L^2(Q, \Sigma_Q, d\mu)$ で稠密である．一方，$e^{it_1\phi_E(f_1)} \cdots e^{it_n\phi_E(f_n)} = e^{i\phi_E(\sum_{j=1}^n t_j f_j)}$ であるから，題意が成立する． ■

2.4 ガウス超過程

この節では，定理 2.5 の応用として，本書の第 6 章以降で展開される理論と深い関わりをもつ確率超過程の存在を示し，その基本的な性質を調べる．

$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする．例 2.3 において，$A = I/4$（I は恒等作用素）の場合を考えると

$$\chi(f) = e^{-\|f\|^2/4}, \quad f \in \mathcal{H} \tag{2.29}$$

によって定義される汎関数 $\chi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は正型であり，明らかに，定理 2.4 の仮定の条件 $(\chi.1)$, $(\chi.2)$ を満たす．この汎関数が $(\chi.3)$ と $(\chi.4)$（定理 2.5 を参照）も満たすことを示すために，$E := \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の任意の CONS としよう．このとき，任意の自然数 N とすべての実数 t_n $(n = 1, \cdots, N)$ に対して

$$\chi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n\, e_n\right) = e^{-\sum_{n=1}^{N} t_n^2/4} \tag{2.30}$$

となる．したがって，$\chi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n\, e_n\right)$ は $t_1, \cdots, t_N$ の関数として無限回微分可能である．ゆえに $(\chi.3)$ は満たされる．特に

$$\left.\frac{\partial^2 \chi(t_n\, e_n + t_m(1-\delta_{nm})e_m)}{\partial t_n\, \partial t_m}\right|_{t_n=t_m=0} = -\frac{1}{2}\delta_{nm}. \tag{2.31}$$

したがって

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left.\frac{\partial^2 \chi(t_n\, e_n + t_m(1-\delta_{nm})e_m)}{\partial t_n \partial t_m}\right|_{t_n=t_m=0} \langle e_n, f\rangle \langle e_m, f\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, f\rangle|^2 = -\frac{1}{2}\|f\|^2 \tag{2.32}$$

となるので，条件 $(\chi.4)$ も満たされる．ゆえに定理 2.5 によって，(Q, Σ_Q) 上の確率測度 $\mu_{\mathcal{H}}$ で次の性質 (i)〜(iv) をもつものが存在する：

(i)
$$e^{-\|f\|^2/4} = \int_Q e^{i\phi_E(f)}\, d\mu_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.33}$$

ただし，$\phi_E(f)$ は (2.17) によって定義される確率変数である．

(ii)
$$\phi_E(f) \in L^2(Q, d\mu_{\mathcal{H}}), \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.34}$$

(iii)（実線形性）すべての $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{H}$ に対して

$$\phi_E(af + bg) = a\phi_E(f) + b\phi_E(g), \quad \mu_{\mathcal{H}}\text{-}a.e. \tag{2.35}$$

(iv) $\{\phi_E(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ はフルである．

上述の測度 $\mu_{\mathcal{H}}$ の存在は，付録 D の定理 D.10 を用いても証明される．実際，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ_n を $d\mu_n(x) = \pi^{-1/2}\, e^{-x_n^2}\, dx_n$ $(x_n \in \mathbb{R})$ によって定義すれば（これは 1 次元ガウス型確率測度）

$$\mu_{\mathcal{H}} = \otimes_{n=1}^{\infty}\mu_n \quad (\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の無限直積}) \tag{2.36}$$

である．この理由から，$\mu_{\mathcal{H}}$ を**無限次元のガウス型測度**と呼ぶ．

(2.33) と (2.35) によって，任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\phi_E(f)$ の特性関数 $C_{\phi_E(f)}(t)$ は

$$C_{\phi_E(f)}(t) = e^{-t^2\|f\|^2/4} \tag{2.37}$$

となるので，$\phi_E(f)$ は平均 0，分散 $\|f\|^2/2$ のガウス型確率変数である．この事実と (2.35) を使うと，任意の $n \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して $\sum_{j=1}^n c_j \phi_E(f_j) = \phi_E\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j\right)$ は平均 0，分散が

$$\frac{\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\|^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \langle f_j, f_k\rangle$$

のガウス型確率変数である．したがって，命題 1.39 から，$(\phi_E(f_1), \cdots, \phi_E(f_n))$ はガウス型確率ベクトルである．ゆえに，確率超過程 $\{\phi_E(f)\}_{f\in\mathcal{H}}$ に対して，1.5 節，1.14 節，1.15 節の一般論を適用できる．だが，その前に，ここで構成した特徴的な確率超過程をその 1 つの実現としてもつような，より一般的な確率超過程の概念を定義しておく．

【定義 2.12】 $\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間とし，(M, Σ, μ) を確率空間とする．各 $f \in \mathcal{H}$ に対して，(M, Σ, μ) 上の確率変数 $\phi(f)$ が 1 つ定まり，次の性質を満たすとき，$\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ を **$\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス型確率過程** (Gaussian random process) あるいは**ガウス超過程**という：

(GP.1)（実線形性）任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と $f, g \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g) \quad \mu\text{-a.e.}$$

(GP.2) $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ はフルである．

(GP.3) 各 $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\phi(f)$ はガウス型確率変数であり

$$\int_M e^{i\phi(f)} d\mu = e^{-\|f\|^2/4} \tag{2.38}$$

が成り立つ．

この定義に関して，若干の注意をしておこう．

(i) ガウス超過程 $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ が定義（実現）される確率空間 (M, Σ, μ) は一意的には決まらない．そこで，そのような確率空間 (M, Σ, μ) と確率変数の族

$\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ の組 $((M, \Sigma, \mu), \{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ を（$\mathcal{H}$ を添え字集合とする）ガウス超過程の 1 つの**モデル**という．たとえば，すでに構成した $((Q, \Sigma_Q, \mu_{\mathcal{H}}), \{\phi_E(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ は，$\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス超過程のモデルの 1 つである．しかし，後に示すように，$L^2(M, \Sigma, d\mu)$ の理論，すなわち，L^2 理論については，任意の 2 つのモデルはユニタリ同値であり，この意味においては，$\mathcal{H}$ を添え字とするガウス超過程の理論はモデル独立である．

ミンロスの定理（付録 D，定理 D.18）を応用することにより，M として $\mathcal{H}$ の核型拡大をとることが可能である．このモデルは，ガウス超過程から構成される数学的対象のより詳しい性質を解析するとき，有用となる場合がある．

(ii) (GP.1) によって，任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，$k\phi(f) = \phi(kf)$ a.e. である．これと (GP.3) により

$$\int_M e^{ik\phi(f)}\, d\mu = e^{-\|f\|^2 k^2/4}, \quad k \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

となる．したがって，$\phi(f)$ は平均 0，分散 $\|f\|^2/2$ のガウス型確率変数である．

(iii) 数学の文献では，(2.38) の右辺を $e^{-\|f\|^2/2}$ とする場合が多い（指数因子が 2 倍だけ違う）．ここでは，量子場の理論への応用を念頭において，(2.38) のようにした．しかし，この違いは本質的なことではない．というのは，(2.38) が満たされるとき，$\tilde{\phi}(f) := \sqrt{2}\phi(f)$ とすれば，(2.39) によって

$$\int_M e^{i\tilde{\phi}(f)}\, d\mu = e^{-\|f\|^2/2}$$

となるからである．一般に，(2.38) が成り立つとき $\lambda > 0$ を定数として，

$$\phi_\lambda(f) := \sqrt{2\lambda}\phi(f)$$

とおけば，(2.39) によって

$$\int_M e^{i\phi_\lambda(f)}\, d\mu = e^{-\lambda\|f\|^2/2}.$$

したがって，$e^{-\lambda\|f\|^2/2}$ を特性関数とするガウス型確率過程は，上述のガウス型確率過程 $\phi(f)$ の単純なスケーリングで得られる．

(iv) $\mathcal{H}$ が有限次元の実ヒルベルト空間で $\dim \mathcal{H} = N < \infty$ の場合を考えよう．$M = \mathbb{R}^N$ とし，$\mathbb{R}^N$ 上の確率測度 μ を

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi^{N/2}}\, e^{-x^2}\, dx \quad \left(x \in \mathbb{R}^N\right)$$

によって定義する．$\{e_n\}_{n=1}^N$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とし，$f = \sum_{n=1}^N a_n(f)\, e_n$ ($a_n(f) := \langle e_n, f\rangle$) と展開するとき，確率空間 $(\mathbb{R}^N, \mu)$ 上の確率変数 $\phi(f)$ を

$$\phi(f)(x) := \sum_{n=1}^N a_n(f) x_n, \quad x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

によって定義する．このとき，$\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ は $\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス型確率過程である．

2.5 ガウス超過程の一般的性質

この節を通して，$\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ を確率空間 (M, Σ, μ) 上のガウス超過程とする．$\{\phi_E(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ の場合と同様に，任意の $n \in \mathbb{N}$ とすべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ に対して $(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ はガウス型確率ベクトルであり

$$\langle \phi(f)\phi(g) \rangle = \frac{1}{2} \langle f, g \rangle, \quad f, g \in \mathcal{H} \tag{2.40}$$

が成り立つ．したがって，定理 1.37 によって，すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f_j \in \mathcal{H}$ ($j = 1, \cdots, 2n$) に対して

$$\langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_{2n-1}) \rangle = 0, \tag{2.41}$$

$$\langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_{2n}) \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{comb}} \langle f_{j_1}, f_{k_1} \rangle \cdots \langle f_{j_n}, f_{k_n} \rangle \tag{2.42}$$

が成り立つ．

1.15 節において，確率変数のウィック積を定義し，いくつかの性質を導出した．定理 1.47-(i) を応用すれば，すべての $n, m \in \mathbb{N}$ と $f_j, g_k \in \mathcal{H}$ ($j = 1, \cdots, n$, $k = 1, \cdots, m$) に対して

$$\langle :\phi(f_1) \cdots \phi(f_n): :\phi(g_1) \cdots \phi(g_m): \rangle = \delta_{nm} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle f_1, g_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle f_n, g_{\sigma(n)} \rangle \tag{2.43}$$

を得る．これは，$n \neq m$ ならば $:\phi(f_1) \cdots \phi(f_n):$ と $:\phi(g_1) \cdots \phi(g_m):$ が $L^2(M, d\mu)$ の元として直交することを意味する．そこで，$L^2(M, d\mu)$ の部分空間 $\Gamma_{\text{fin}}^{(n)}(\mathcal{H})$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) を

$$\Gamma_{\text{fin}}^{(0)}(\mathcal{H}) := \{\alpha 1 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}, \tag{2.44}$$

$$\Gamma_{\mathrm{fin}}^{(n)}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\{:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): \mid f_j \in \mathcal{H}, j=1,\cdots,n\}) \tag{2.45}$$

によって定義すれば

$$\Gamma_{\mathrm{fin}}^{(n)}(\mathcal{H}) \perp \Gamma_{\mathrm{fin}}^{(m)}(\mathcal{H}), \quad n \neq m \tag{2.46}$$

が成り立つ．したがって

$$\Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\{1, :\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H},\ j=1,\cdots,n\}) \tag{2.47}$$

とすれば

$$\Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) = \widehat{\oplus}_{n=0}^{\infty}\Gamma_{\mathrm{fin}}^{(n)}(\mathcal{H}) \tag{2.48}$$

という直交分解が成立する．ただし，$\widehat{\oplus}_{n=0}^{\infty}$ は代数的無限直和を表す[4]．

次の事実に注目しよう：

【補題 2.13】 部分空間 $\Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $L^2(M,d\mu)$ で稠密である：

$$\overline{\Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})} = L^2(M,d\mu). \tag{2.49}$$

証明 $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ のフル性により，$\mathcal{L}(\{e^{i\phi(f)} \mid f \in \mathcal{H}\})$ は $L^2(M,d\mu)$ で稠密である（(GP.2) を参照）．したがって，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，$e^{i\phi(f)}$ が $\Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ の元で近似できることを示せばよい．定理 1.44-(i) の応用によって

$$\psi_N := e^{-\|f\|^2/4}\sum_{n=0}^{N}\frac{i^n}{n!}:\phi(f)^n:$$

とおけば

$$e^{i\phi(f)} = \lim_{N\to\infty}\psi_N \tag{2.50}$$

であり，これは $L^2(M,d\mu)$ の意味でも収束する．明らかに，$\psi_N \in \Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ であるから，主張が示されたことになる． ∎

各 $n \geq 0$ に対して

$$\Gamma^{(n)}(\mathcal{H}) := \overline{\Gamma_{\mathrm{fin}}^{(n)}(\mathcal{H})} \tag{2.51}$$

---

[4] 「任意の $\psi \in \Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ に対して，自然数 N と $\psi_n \in \Gamma_{\mathrm{fin}}^{(n)}(\mathcal{H})$ $(n=0,1,\cdots,N)$ があって，$\psi = \sum_{n=0}^{N}\psi_n$ と表される」ということ．

とすれば (2.48) から

$$\overline{\Gamma_{\text{fin}}(\mathcal{H})} = \oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma^{(n)}(\mathcal{H}) \tag{2.52}$$

が成り立つ．

この事実と補題 2.13 によって

$$L^2(M, d\mu) = \oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma^{(n)}(\mathcal{H}) \tag{2.53}$$

という直交分解が得られる．これを**伊藤–シーガル–ウィーナー分解**と呼ぶ．

次に定理 1.47-(ii) を応用して，$L^2(M, d\mu)$ の CONS の 1 つを $\mathcal{H}$ の CONS から構成することを考える．そこで，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．$\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$ (非負整数の全体) とし，非負の整数を成分とする数列の全体を $\mathbb{Z}_+^{\infty}$ とする：

$$\mathbb{Z}_+^{\infty} := \{\nu = \{\nu_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \nu_j \in \mathbb{Z}_+,\ j \geq 1\}. \tag{2.54}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{Z}_+^{\infty,n} := \left\{\nu = \{\nu_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}_+^{\infty} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j = n\right\} \subset \mathbb{Z}_+^{\infty} \tag{2.55}$$

を導入する．$\mathbb{Z}_+^{\infty,n}$ の任意の元 ν に対しては，$\nu_j \neq 0$ となる j は有限個（n 個以下）であるから

$$\phi_\nu^{(n)} := \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{\infty}\nu_j!}} : \phi(e_1)^{\nu_1}\cdots\phi(e_j)^{\nu_j}\cdots : \tag{2.56}$$

が定義される．このとき，次の事実が成立する：

【定理 2.14】

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{\phi_\nu^{(n)} \mid \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}\}$ は $\Gamma^{(n)}(\mathcal{H})$ の CONS である．

(ii) $\{1, \phi_\nu^{(n)} \mid \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n},\ n \in \mathbb{N}\}$ は $L^2(M, d\mu)$ の CONS である．

この定理を証明するために，補題を 2 つ用意する：

【補題 2.15】　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ を任意にとる．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $f_{j,k} \in \mathcal{H}$ があって，$\lim_{k\to\infty} f_{j,k} = f_j$ が成り立つとする．このとき，$L^2(M, d\mu)$ の収束の意味で

$$\lim_{k\to\infty} : \phi(f_{1,k})\cdots\phi(f_{n,k}) :=: \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : . \tag{2.57}$$

証明　(2.43) により，一般に任意の $g_j \in \mathcal{H}$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して

$$\begin{aligned}&\|:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):-:\phi(g_1)\cdots\phi(g_n):\|^2_{L^2(M,d\mu)}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\langle f_1,f_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle f_n,f_{\sigma(n)}\rangle\\&\quad-2\langle f_1,g_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle f_n,g_{\sigma(n)}\rangle+\langle g_1,g_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle g_n,g_{\sigma(n)}\rangle\Big).\end{aligned}\tag{2.58}$$

そこで，$g_j = f_{j,k}$ とし，内積の連続性を用いれば，(2.57) が得られる．■

【補題 2.16】　各 $n\in\mathbb{N}$ と任意の $f_j\in\mathcal{H}$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して，$L^2(M,d\mu)$ 収束の意味で

$$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):=\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{\infty}\langle e_{i_1},f_1\rangle\cdots\langle e_{i_n},f_n\rangle:\phi(e_{i_1})\cdots\phi(e_{i_n}):\tag{2.59}$$

が成り立つ．

証明　$f_{j,k}:=\sum_{i=1}^{k}\langle e_i,f_j\rangle\, e_i$ とすれば，$\lim_{k\to\infty}f_{j,k}=f_j$．そこで，補題 2.15 を応用すれば，(2.59) が得られる．■

定理 2.14 の証明

(i) $\{\phi_\nu^{(n)}\mid\nu\in\mathbb{Z}_+^{\infty,n}\}$ が $\Gamma^{(n)}(\mathcal{H})$ の正規直交系であることは，(2.43) による．(2.51) によって，$\mathcal{L}(:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):\mid f_j\in\mathcal{H},\ j=1,\cdots,n\})$ は $\Gamma^{(n)}(\mathcal{H})$ で稠密である．したがって，$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ が $\phi_\nu^{(n)},\nu\in\mathbb{Z}_+^{\infty,n}$ の有限線形結合で近似できることを示せばよい．しかし，これは (2.59) からただちにしたがう．

(ii) (i) と (2.53) による．■

定理 2.14 の応用として，可分な実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス超過程の（ユニタリ同値の意味での）一意性を証明することができる．すなわち，次の定理が成り立つ：

【定理 2.17】　$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とし，$((M,\Sigma,d\mu),\{\phi(f)\mid f\in\mathcal{H}\})$ と $((M',\Sigma',d\mu'),\ \{\phi'(f)\mid f\in\mathcal{H}\})$ を $\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス超過程とする．このとき，ユニタリ変換 $U:L^2(M,d\mu)\to L^2(M',d\mu')$ で次の性質を満たすものがただ 1 つ存在する：

(i) $U1 = 1$.

(ii) すべての $n \in \mathbb{N}$ と任意の $f_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \cdots, n$ に対して

$$U : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : = : \phi'(f_1) \cdots \phi'(f_n) :. \tag{2.60}$$

(iii) すべての $f \in \mathcal{H}$ に対して，作用素の等式 $U\phi(f)U^{-1} = \phi'(f)$ が成り立つ．ただし，$\phi(f)$, $\phi'(f)$ はそれぞれ，$L^2(M, d\mu)$, $L^2(M', d\mu')$ 上の掛算作用素とみる．

証明 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．このとき，定理 2.14-(ii) によって，$\{1, {\phi'}_{\nu}^{(n)} \mid \nu \in \mathbb{Z}_{+}^{\infty,n},\ n \in \mathbb{N}\}$ は $L^2(M', d\mu')$ の CONS である．したがって，可分なヒルベルト空間に関する同型定理[5]により，$L^2(M, d\mu)$ から $L^2(M', d\mu')$ へのユニタリ変換 U で

$$U1 = 1, \quad U\phi_{\nu}^{(n)} = {\phi'}_{\nu}^{(n)}, \quad \nu \in \mathbb{Z}_{+}^{\infty,n},\ n \in \mathbb{N}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．第 1 式は (i) を意味する．U の有界性と (2.59) を用いると (ii) も導かれる．

$\phi(f)$ は μ-a.e. 有限な実数値関数であるから，$L^2(M, d\mu)$ 上の掛算作用素として自己共役である（$\phi'(f)$ についても同様）．したがって，$\{e^{it\phi(f)}\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $L^2(M, d\mu)$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群である．ベクトル $\psi := e^{i\phi(g)}$, $g \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} e^{it\phi(f)}\psi &= e^{i\phi(tf+g)} \\ &= e^{-\|tf+g\|^2/4} : e^{i\phi(tf+g)} : = e^{-\|tf+g\|^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} : \phi(tf+g)^n : \end{aligned}$$

であるから，U の有界性を用いると

$$Ue^{it\phi(f)}\psi = e^{-\|tf+g\|^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} : \phi'(tf+g)^n : = e^{it\phi'(f)}\, e^{i\phi'(g)}$$

となる．特に，$t = 0$ とすれば，$U\psi = e^{i\phi'(g)}$ であるから $U\, e^{it\phi(f)} U^{-1}(U\psi) = e^{it\phi'(f)}(U\psi)$ が得られる．$\mathcal{L}(\{e^{i\phi(g)} \mid g \in \mathcal{H}\})$ は $L^2(M, d\mu)$ で稠密であるから，$\mathcal{L}(\{U\psi \mid \psi = e^{i\phi(g)},\ g \in \mathcal{H}\})$ は $L^2(M', d\mu')$ で稠密である．$U\, e^{it\phi(f)} U^{-1}$

[5] 拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の定理 2.5.

と $e^{it\phi'(f)}$ はいずれも $L^2(M', d\mu')$ 上の有界作用素であるから，作用素の等式 $U e^{it\phi(f)} U^{-1} = e^{it\phi'(f)}$ が成り立つ．作用素解析により，左辺は $e^{itU\phi(f)U^{-1}}$ に等しい．これと強連続1パラメータユニタリ群の生成子の一意性により，作用素の等式 $U\phi(f)U^{-1} = \phi'(f)$ が得られる． ∎

この節を終えるにあたって，ガウス超過程を構成する確率変数のウィック積に関する重要な漸化式を定理としてあげておこう：

【定理 2.18】 すべての $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ と $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$:\phi(f_1)\phi(f_2): = \phi(f_1)\phi(f_2) - \frac{1}{2}\langle f_1, f_2\rangle, \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} :\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): &= \phi(f_1) :\phi(f_2)\cdots\phi(f_n): \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\langle f_1, f_j\rangle :\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n):, \quad n \geq 3. \end{aligned} \tag{2.62}$$

証明 定理 1.48 を $X_j = \phi(f_j)$ として応用すればよい． ∎

定理 2.18 は，確率変数のウィック積と多項式の関係に関する基本的事実を明らかにする：

【定理 2.19】 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)$ は

$$\phi(f_1)\cdots\phi(f_n) =: \phi(f_1)\cdots\phi(f_n): + \sum_{k=0}^{n-2} W_k(f_1, \cdots, f_n) \tag{2.63}$$

という形に表される．ただし，$W_k(f_1, \cdots, f_n)$ は k 次のウィック積の有限線形結合である．特に

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\{1, \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n\}) \\ &\quad = \mathcal{L}(\{1, :\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n\}) \end{aligned} \tag{2.64}$$

が成り立つ．

証明 (2.63) を n に関する帰納法で証明する．まず，$n = 1, 2$ のときは，自明

である．(2.63) が $n=m$ のとき成立するとする．すなわち

$$\phi(f_1)\cdots\phi(f_m) = :\phi(f_1)\cdots\phi(f_m): + \sum_{k=0}^{m-2} W_k(f_1,\cdots,f_m)$$

このとき，任意の $f_{m+1}\in\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}&\phi(f_1)\cdots\phi(f_{m+1})\\ &\quad = \phi(f_{m+1}):\phi(f_1)\cdots\phi(f_m): + \sum_{k=1}^{m-2}\phi(f_{m+1})W_k(f_1,\cdots,f_m).\end{aligned}$$

定理 2.18 により

$$\begin{aligned}\phi(f_{m+1}):\phi(f_1)\cdots\phi(f_m): = &:\phi(f_1)\cdots\phi(f_{m+1}):\\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\langle f_{m+1},f_j\rangle :\phi(f_1)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_m):.\end{aligned}$$

同様に，$\phi(f_{m+1})W_k(f_1,\cdots,f_m)$ は $(k+1)$ 次のウィック積と $(k-1)$ 次のウィック積の有限線形結合である．したがって，(2.63) は $n=m+1$ の場合も成立する．

(2.64) の左辺の集合と右辺の集合をそれぞれ，$\mathcal{L},\mathcal{R}$ とする．定理 2.18 と帰納法により，$\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ は容易にわかる．逆の包含関係は (2.63) からしたがう．■

2.6　複　素　化

ガウス超過程の理論は，実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を複素化した形式に拡大しておくと，応用上便利である．まず，$\mathcal{H}$ の複素化の復習から始める．$\mathcal{H}$ の直積空間

$$\mathcal{H}\times\mathcal{H} = \{(f,g)\mid f,g\in\mathcal{H}\} \tag{2.65}$$

に和と複素数倍を次のように定義する：

$$\begin{aligned}&(f,g)+(f',g') := (f+f',g+g'),\\ &(a+ib)(f,g) = (af-bg,bf+ag),\quad a,b\in\mathbb{R},\ f,f',g,g'\in\mathcal{H}.\end{aligned}$$

このとき，$\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ は複素ベクトル空間になる．この複素ベクトル空間を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ と記す．任意の $(f,g)\in\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は

$$(f,g) = (f,0)+(0,g) = (f,0)+i(g,0)$$

と書ける．そこで，f と $(f, 0)$ を同一視して，$(f, g) = f + ig$ と記す．この同一視において，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ の実閉部分空間と同一視される．

次に，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ の任意の 2 つの元 $f+ig, f'+ig'$ に対して，複素数 $\langle f+ig, f+ig' \rangle$ を

$$\langle f+ig, f'+ig' \rangle := \langle f, f' \rangle + \langle g, g' \rangle + i(\langle f, g' \rangle - \langle g, f' \rangle), \quad f, f', g, g' \in \mathcal{H}$$

によって定義すれば，これは $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に 1 つの内積を定める．この複素内積空間も同じ記号 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ で表す．$\mathcal{H}$ の完備性を用いることにより，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は完備であることがわかる．したがって，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は複素ヒルベルト空間である．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ を実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の**複素化**と呼ぶ[6]．

$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の写像 C を

$$C(f+ig) := f - ig, \quad f, g \in \mathcal{H} \tag{2.66}$$

によって定義し，これを $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の**複素共役子** (complex conjugation) と呼ぶ．容易にわかるように，C は反線形（共役線形）であり

$$C^2 = I \quad (\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \text{ 上の恒等作用素}), \tag{2.67}$$

$$\|Cf\| = \|f\|, \quad f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{2.68}$$

が成り立つ．したがって，C は $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の共役子である．明らかに

$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \mid Cf = f\} \tag{2.69}$$

が成り立つ．

逆に，任意の複素ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}$ 上の任意の共役子 J に対して

$$\mathcal{K}_{\text{real}} := \{\psi \in \mathcal{K} \mid J\psi = \psi\}$$

とおけば，まず，$\mathcal{K}_{\text{real}}$ は実ヒルベルト空間であることがわかる．さらに任意の $\psi \in \mathcal{K}$ に対して

$$\psi_{\text{re}} := \frac{1}{2}(\psi + J\psi), \quad \psi_{\text{im}} := \frac{1}{2i}(\psi - J\psi)$$

[6] 以上の記述からわかるように，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ をつくる仕方は，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ を構成するときの考え方をヒルベルト空間の文脈へと拡張したものである．

とすれば，$\psi_{\mathrm{re}}, \psi_{\mathrm{im}} \in \mathcal{K}_{\mathrm{real}}$ であり

$$\psi = \psi_{\mathrm{re}} + i\psi_{\mathrm{im}}$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}_{\mathrm{real}}$ の複素化であり，J はこの複素化における複素共役子である．$\psi_{\mathrm{re}}, \psi_{\mathrm{im}}$ をそれぞれ，共役子 J に関する ψ の**実部**，**虚部**という．

ところで，任意の複素ヒルベルト空間は必ず共役子をもつ．実際，$\mathcal{K}$ の CONS を $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$ とすれば（添え字集合 $\mathbf{A}$ は非可算集合でもよい），任意の $\psi \in \mathcal{K}$ は $\psi = \sum_\alpha \langle e_\alpha, \psi\rangle e_\alpha$ と展開される[7]．そこで，写像 $J : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ を $J\psi := \sum_\alpha \langle e_\alpha, \psi\rangle^* \, e_\alpha$ によって定義すれば，この J は共役子である．この事実と前段の結果により，任意の複素ヒルベルト空間はある実ヒルベルト空間の複素化であることが結論される．

さて，前節のガウス超過程を $\phi(f)$, $f \in \mathcal{H}$ とし，$f = f_{\mathrm{re}} + if_{\mathrm{im}} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $f_{\mathrm{re}}, f_{\mathrm{im}} \in \mathcal{H}$ に対して，$\phi(f)$ を

$$\phi(f) := \phi(f_{\mathrm{re}}) + i\phi(f_{\mathrm{im}}) \tag{2.70}$$

によって定義する．このとき，直接計算により，対応 : $f \mapsto \phi(f)$ は複素線形であることがわかる：

$$\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g), \quad f, g \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.71}$$

複素化に伴う諸式の自然な拡張を見出すのは難しくない．たとえば，(2.40) は

$$\langle \phi(f)^*\phi(g)\rangle = \langle \phi(f), \phi(g)\rangle_{L^2(M,d\mu)} = \frac{1}{2}\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \quad f, g \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{2.72}$$

となる．

ウィック積は線形性により拡張する：

$$\begin{aligned} &:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): \\ &\quad := \sum_{\sigma_1=\mathrm{re,im}} \sum_{\sigma_2=\mathrm{re,im}} \cdots \sum_{\sigma_n=\mathrm{re,im}} i^{c(\sigma)} :\phi(f_{1\sigma_1})\phi(f_{2\sigma_2})\cdots\phi(f_{n\sigma_n}):, \\ &\qquad\qquad f_j = f_{j\,\mathrm{re}} + if_{j\,\mathrm{im}} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}},\ j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{2.73}$$

ただし，$c(\sigma)$ は集合 $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ の中で $\sigma_j = \mathrm{im}$ となる j の個数を表す．

[7] $\mathbf{A}$ が非可算の場合は，$\langle e_\alpha, \psi\rangle$ はたかだか可算無限個の α を除いて 0 である．

2.7 確率過程の連続版

$\mathfrak{I}$ を空でない集合とし，これを添え字集合とする確率過程 $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$, $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ を考える．$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ がいずれも同じ確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上で定義され，すべての $\alpha \in \mathfrak{I}$ に対して，$X_\alpha(\omega) = Y_\alpha(\omega)$, P-a.e.$\omega \in \Omega$ が成り立つとき，一方の確率過程を他方の確率過程の**変形** (modification) という．

確率過程 $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ が与えられたとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathfrak{I}$ から定まる確率ベクトル $X_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n} = (X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_n})$ の同時分布 $P^{X_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}}$ を $\mathcal{X}$ の $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対する**有限次元分布**という．

$\mathcal{X}$ のすべての有限次元分布の集合と $\mathcal{Y}$ のそれが一致するとき（この場合は，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が同一の確率空間上で定義されている必要はない)，すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathfrak{I}$ に対して，$P^{X_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}} = P^{Y_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}}$ が成り立つとき，一方を他方の**表現** (version) という．この場合，2つの確率過程 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ は**同値**であるという[8]．

$\mathfrak{I}$ が位相空間の場合，これを添え字とする確率過程 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ について，α に関する連続性を考えることができる．最も基本的な連続性は P-a.e.$\omega \in \Omega$ に対して，対応 : $\alpha \mapsto X_\alpha(\omega)$ が連続となるようなものである．このような確率過程を**連続な確率過程**と呼ぶ．容易に推察されるように，X_α が α について連続のほうが解析学的に扱いやすい．そこで，与えられた確率過程がどのような条件のもとで連続な確率過程の表現をもつかを考察することが必要になる．このために，ある概念を導入する：

【定義 2.20】 $\mathfrak{I}$ を位相空間とする．確率過程 $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ に対して，次の (i), (ii) を満たす確率過程 $\widetilde{\mathcal{X}} = \{\widetilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ が存在するとき，$\mathcal{X}$ は**連続版** (continuous version) をもつといい，$\widetilde{\mathcal{X}}$ を $\mathcal{X}$ の1つの連続版という：

(i) $\widetilde{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X}$ の表現である．

(ii) 確率過程 $\widetilde{\mathcal{X}}$ が実現している確率空間を $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ とするとき，P-a.e.$\omega \in \Omega$ に対して，標本経路 : $\alpha \mapsto \widetilde{X}_\alpha(\omega)$ は連続である．

確率過程の連続版の存在については，次の定理が基本的である：

---

[8] "表現" という関係は確率過程全体の集合における1つの同値関係であることは容易にわかる．この意味で，同値という呼称は正当性をもつ．

【定理 2.21】 $\mathcal{I} = [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ の場合を考え，確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ が次の条件を満たすとする：

(i) (L^1 連続性)　すべての $t \in [a,b]$ に対して，

$$\lim_{t'\to t} \int_\Omega |X_{t'}(\omega) - X_t(\omega)|\, dP = 0,$$

(ii) $D \subset [a,b]$ を $[a,b]$ で稠密な部分集合とし，P-a.e.$\omega \in \Omega$ に対して，定数 $M_\omega > 0$ と $\delta_\omega > 0$ があって，すべての $t, s \in D$ に対して

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le M_\omega |t-s|^{\delta_\omega} \tag{2.74}$$

が成り立つとする．

このとき，$\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ は同じ確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上で連続版 $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[a,b]}$ をもつ．さらに

$$|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)| \le M_\omega |t-s|^{\delta_\omega}, \quad P\text{-a.e.}\omega,\ t, s \in [a,b] \tag{2.75}$$

が成立する．

証明　$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega \mid (2.74)\ \text{が成立}\}$ とすれば，$P(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$．したがって，$P(\Omega_0) = 1$．各 $\omega \in \Omega_0$ に対して，(2.74) によって，$X_t(\omega)$ は $t \in D$ について連続である．D は $[a,b]$ で稠密であるから，任意の $t \in [a,b]$ に対して，$\lim_{n\to\infty} t_n = t$ となる数列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ $(t_n \in D,\ n \in \mathbb{N})$ がとれる．このとき，(2.74) によって，$\{X_{t_n}(\omega)\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列をなす．そこで

$$\widetilde{X}_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$$

を定義する．この定義が $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ の取り方によらないことを示すのは難しくない．$t \in D$ の場合は，$t_n = t$ にとれるので，$\widetilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega) \cdots (*)$ が成り立つ．

上と同様に，任意の $s \in [a,b]$ に対して，$s_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$，$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ となる数列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ がとれる．したがって

$$|X_{t_n}(\omega) - X_{s_n}(\omega)| \le M_\omega |t_n - s_n|^{\delta_\omega}.$$

そこで，$n \to \infty$ とすれば

$$|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)| \le M_\omega |t-s|^{\delta_\omega}, \quad s, t \in [a,b],\ \omega \in \Omega_0 \tag{2.76}$$

が得られる．これは $\widetilde{X}_t(\omega)$ が t について連続であることを示す．

$\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ に対しては，$\widetilde{X}_t(\omega) := 0$ とおく．このとき，$\widetilde{X}_t$ は $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の確率変数であり，P-a.e.ω に対して，$\widetilde{X}_t(\omega)$ は連続である．

任意の $n \in \mathbb{N}$ とすべての $t_1, \cdots, t_n \in D$ に対して，$X := (X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ の分布 P^X と $\widetilde{X} := (\widetilde{X}_{t_1}, \cdots, \widetilde{X}_{t_n})$ の分布 $P^{\widetilde{X}}$ が一致することは $(*)$ から明らか．換言すれば

$$\int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j}}\, dP = \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j \widetilde{X}_{t_j}}\, dP,$$
$$k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n,\ t_j \in D,\ j = 1, \cdots, n. \quad (2.77)$$

$t_j \in [a,b]$ を任意にとり，$t_j^{(m)} \in D$, $\lim_{m\to\infty} t_j^{(m)} = t_j$ となる数列 $\{t_j^{(m)}\}_m$ をとる．このとき，(2.77) から

$$\int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j^{(m)}}}\, dP = \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j \widetilde{X}_{t_j^{(m)}}}\, dP, \quad (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n.$$

右辺は $\widetilde{X}_t$ $(t \in [a,b])$ の連続性とルベーグの優収束定理により，$m \to \infty$ のとき，$\widetilde{X}$ の特性関数 $C_{\widetilde{X}}(k)$ に収束する．したがって

$$\lim_{m\to\infty} \int e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j^{(m)}}}\, dP^X = C_{\widetilde{X}}(k).$$

一方，不等式 (2.18) と条件 (i) を用いると

$$\left| \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j^{(m)}}}\, dP - \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j}}\, dP \right| \le \sum_{j=1}^n |k_j| \int_\Omega |X_{t_j^{(m)}} - X_{t_j}|\, dP$$
$$\to 0\ (m \to \infty).$$

したがって

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n k_j X_{t_j^{(m)}}}\, dP = C_X(k).$$

ゆえに $C_X(k) = C_{\widetilde{X}}(k)$．これと定理 1.25 により，$P^X = P^{\widetilde{X}}$ を得る．ゆえに $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[a,b]}$ は $\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ の連続版である．　■

応用上，条件 (2.74) を検証するのは一般には難しい．そこで，それが成立する十分条件を知っていると便利である．次の定理はこの側面に関するものである：

【定理 2.22】(コルモゴロフの連続性定理) a, b $(a < b)$ を実数，$\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上の確率過程とする．定数 $C > 0, r, p$ $(0 < r < p)$ があって，不等式

$$\mathrm{E}[|X_{t+h} - X_t|^p] \le C|h|^{1+r} \quad (a \le t < t+h \le b) \tag{2.78}$$

が成り立つと仮定する．$0 < \alpha < r/p$ (< 1) を固定する．このとき，P に関して，ほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して定数 $M_\omega > 0$ が存在して，$[a,b]$ の中のすべての 2 進有理数[9] s, t に対して

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le M_\omega |t-s|^\alpha \tag{2.79}$$

が成立する．

証明 証明に関しては，$a = 0$, $b = 1$ として一般性を失わない[10]．$\varepsilon := r - \alpha p$ とおけば，仮定により，$\varepsilon > 0$ である．$t, t+h \in [0,1]$ とする．このとき

$$\begin{aligned} P(\{\omega\in\Omega \mid |X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \ge |h|^\alpha\}) &\le |h|^{-\alpha p}\mathrm{E}(|X_{t+h} - X_t|^p) \\ &\le C|h|^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$ に対して

$$P(\{\omega\in\Omega \mid |X_{(k+1)/2^n}(\omega) - X_{k/2^n}(\omega)| \ge 2^{-n\alpha}\}) \le C2^{-n}2^{-n\varepsilon}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\{\omega\in\Omega \mid |X_{(k+1)/2^n}(\omega) - X_{k/2^n}(\omega)| \ge 2^{-n\alpha}\}) \\ &\quad \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^n C 2^{-n} 2^{-n\varepsilon} = \frac{C}{2^\varepsilon - 1} < \infty. \end{aligned}$$

この事実とボレル–カンテリの定理（付録 A，定理 A.1）によって，ほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して，自然数 ν_ω が存在して，$n \ge \nu_\omega$ ならば

$$|X_{(k+1)/2^n}(\omega) - X_{k/2^n}(\omega)| < 2^{-n\alpha}, \quad k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1 \tag{2.80}$$

[9] 実数 x の 2 進小数による表示が有限小数であるとき，x を **2 進有理数** (dyadic rational number) という．

[10] そうでない場合には，$s \in [0,1]$ に対して，$Y_s := X_{a+s(b-a)}$ を考えればよい．この場合，Y_s に対する結果が X_t に対する結果を導くことは容易にわかる．

が成り立つ．

以下，簡単のため，$X_t(\omega)$ をしばしば X_t と記す．

$n \geq \nu_\omega$ とし，$t \in [k/2^n, (k+1)/2^n]$ を2進有理数とする．このとき，t は

$$t = \frac{k}{2^n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{2^{n+i}}$$

と表される[11]．ただし，m は自然数であり，各 c_i は0または1である．$t_0 := k/2^n$，$t_\ell := k/2^n + \sum_{i=1}^{\ell} c_i/2^{n+i}$ $(\ell = 1, \cdots, m)$ とおく（したがって，$t_m = t$）．このとき

$$X_t - X_{k/2^n} = \sum_{\ell=1}^{m} (X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}}). \tag{2.81}$$

ここで

$$t_\ell - t_{\ell-1} = \frac{c_\ell}{2^{n+\ell}}.$$

したがって，$c_\ell = 0$ ならば $X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = 0$．$c_\ell = 1$ ならば (2.80) より

$$|X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}}| \leq 2^{-\alpha(n+\ell)}.$$

ゆえに

$$|X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}}| \leq c_\ell 2^{-\alpha(n+\ell)}.$$

これと (2.81) によって

$$|X_t - X_{k/2^n}| \leq \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell 2^{-\alpha(n+\ell)} \leq 2^{-n\alpha} d.$$

ただし，$d := (2^\alpha - 1)^{-1}$．

さて，$t \in [0,1]$，$h > 0$ を2進有理数とし，$h < 2^{-\nu_\omega}$, $t + h \in [0,1]$ とする．このとき，$n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu_\omega$ と $k = 0, 1, \cdots, 2^{n+1} - 1$ が存在して

$$2^{-n-1} \leq h < 2^{-n}, \quad \frac{k}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^{n+1}}$$

となる．したがって

$$\frac{k+1}{2^{n+1}} \leq t + h \leq \frac{k+3}{2^{n+1}}.$$

---

[11] 能代 清,『極限論と集合論』(岩波書店，1970，改版第1刷）の4章，27節や高木貞治,『数の概念』(岩波書店，1970，改版第1刷）の §20 を参照．

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&|X_{t+h} - X_t| \\
&\leq |X_{t+h} - X_{(k+1)/2^{n+1}}| + |X_{(k+1)/2^{n+1}} - X_{k/2^{n+1}}| + |X_{k/2^{n+1}} - X_t| \\
&\leq 2^{-(n+1)\alpha}d + 2^{-(n+1)\alpha} + 2^{-(n+1)\alpha}d \\
&= (2d+1)2^{-(n+1)\alpha} \leq (2d+1)h^\alpha
\end{aligned}
$$

これは

$$K_\omega := \sup_{0<h<2^{-\nu_\omega}} \frac{|X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)|}{h^\alpha} \leq (2d+1) < \infty$$

を意味する．したがって

$$|X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \leq K_\omega h^\alpha, \quad 0 < h < 2^{-\nu_\omega}.$$

$t+h \in [0,1]$ となる任意の 2 進有理数 $h > 0$ に対しては，$h' := h/2^N < 2^{-\nu_\omega}$ となる自然数 N がとれる．このとき

$$X_{t+h} - X_t = \sum_{j=1}^{N}(X_{t+jh'} - X_{t+(j-1)h'})$$

と書けるので

$$|X_{t+h} - X_t| \leq \sum_{j=1}^{N} K_\omega (h')^\alpha = N^{1-\alpha} K_\omega h^\alpha$$

そこで，$M_\omega := 2^{N(1-\alpha)}K_\omega$ とおけば，(2.79) が得られる． ■

【系 2.23】 定理 2.22 の仮定と L^1 連続性を満たす確率過程 $\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ は $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上に連続版 $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[a,b]}$ をもち，すべての $s, t \in [a,b]$ に対して

$$|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)| \leq M_\omega |t-s|^\alpha, \quad P\text{-a.e.}\omega \tag{2.82}$$

が成立する．ここで M_ω は, s, t によらない定数である．

証明 $[a,b]$ における 2 進有理数の全体は $[a,b]$ で稠密であるので，定理 2.22 によって，定理 2.21 の仮定が満たされる．したがって，求める結果が得られる． ■

一般に，$\mathbb{R}$ の区間 T 上の $\mathbb{R}^d$-値関数 f に対して，定数 $C>0$ と $\alpha>0$ が存在して

$$|f(t)-f(s)| \le C|t-s|^\alpha, \quad s,t\in\mathsf{T}$$

が成り立つとき，f は**指数 α のヘルダー連続性**をもつという．

系 2.23 の $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[a,b]}$ は，より精密には，$\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ に対する，**指数 α のヘルダー連続版**と呼ばれる．

関連図書

[1] 江沢 洋・新井朝雄，『場の量子論と統計力学』，日本評論社，1988.

[2] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions* Vol. 4: *Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, 1964.

[3] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[4] 飛田武幸，『ブラウン運動』，岩波書店，1975.

[5] 伊藤 清，『確率論』，岩波書店，1991.

[6] コルモゴロフ，『確率論の基礎概念（第二版）』(根本伸司 訳)，東京図書，1975.

[7] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1577, Springer, 1994.

[8] 重川一郎，『確率解析』，岩波書店，2008.

[9] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean* (*Quantum*) *Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[10] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[11] 梅村泰郎，ヒルベルト空間の核型拡大と核型空間，数学 **15** (1964)，193–210.

[12] 山崎泰郎，『無限次元空間の測度 上下』，紀伊国屋書店，1978.

[13] 保江邦夫，『数理物理学方法序説 4 確率論』，日本評論社，2001.

第3章

純虚数時間における量子力学

3.1 はじめに

量子力学は，原子や分子あるいは素粒子といった，物質の微視的構成要素——総称的に**量子的粒子**と呼ぶ——が織りなす諸現象を原理的・統一的に記述する理論の1つである．この理論は，ヒルベルト空間論を基礎として，抽象的・公理論的に定式化することが可能であり，その本質的な部分は，歴史的には，20世紀最大の数学者の一人，ジョン・フォン・ノイマン(ハンガリー，1903～1957)によって初めて提示された[1]．量子力学の公理系によれば，任意の量子系——Sとしよう——に対して，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が付随し，量子系Sの状態は，$\mathcal{H}$ の零でないベクトルによって表される．このベクトルは**状態ベクトル** (state vector) と呼ばれる．ただし，この場合，ベクトル $\psi \in \mathcal{H}$ によって表される状態と，$\alpha\psi$ (α は零でない任意の複素数) によって表される状態は同じである (**状態の相等原理**)．この文脈では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，量子系Sの**状態のヒルベルト空間**と呼ばれる．

一般に，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (第1変数について反線形，第2変数について線形) によって表し，そのノルムを $\|\cdot\|$ と記す：$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle}$, $\psi \in \mathcal{H}$.

量子系Sにおいて，状態と並ぶ根源的な対象は系の物理量である．これは，

[1] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932. 邦訳：J.v. ノイマン，『量子力学の数学的基礎』(井上 健・広重 徹・恒藤敏彦 訳)，みすず書房，1957.

$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素によって表される（**物理量の公理**[2]）．物理量の中で，特に基本的なのは，量子系の全エネルギーを表す物理量であり，この物理量は**ハミルトニアン**と呼ばれる．いま，これを H とし，その定義域を $D(H)$ で表す[3]．H は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であるから，1 次元のスペクトル測度（単位の分解）$E_H : \mathfrak{B}^1 \to \mathfrak{P}(\mathcal{H})$（$\mathcal{H}$ 上の正射影作用素の全体）がただ 1 つ存在し

$$D(H) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 < \infty \right\}, \tag{3.1}$$

$$\langle \phi, H\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d \langle \phi, E_H(\lambda)\psi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in D(H) \tag{3.2}$$

が成立する（**スペクトル定理**[4]）．E_H を H の**スペクトル測度**と呼ぶ．これを用いると，任意のボレル可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，線形作用素 $f(H)$ を次のように定義できる：

$$D(f(H)) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 < \infty \right\}, \tag{3.3}$$

$$\langle \phi, f(H)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d \langle \phi, E_H(\lambda)\psi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in D(f(H)). \tag{3.4}$$

作用素 $f(H)$ について，任意の $\psi \in D(f(H))$ に対して

$$\|f(H)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \tag{3.5}$$

が成り立つ．(3.4) や (3.5) を自己共役作用素 H の作用素値関数 $f(H)$ の**スペクトル表示**と呼ぶ．

特に，各実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $u_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を $u_t(\lambda) := e^{-it\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ によって定義すれば，作用素 $u_t(H)$ はユニタリ作用素になる．このユニタリ作用素は e^{-itH} と象徴的に書かれる：

$$u_t(H) = e^{-itH}. \tag{3.6}$$

[2] 詳細は略すが，より一般的な観点からは，量子系の物理量の概念をこの範疇に限定する必要はない．

[3] 本書では，ヒルベルト空間上の線形作用素 A の定義域を $D(A)$ と記す．以下，証明なしの言明の証明については，拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）の 3 章，4 章や新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I，II』（朝倉書店，1999）の 2 章や 3.5 節を参照されたい．

[4] $\mathbb{R}$ 上のボレル可測関数 f に対して，$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2$ は，測度 $\|E_H(\cdot)\psi\|^2 : \mathfrak{B}^1 \to [0,\infty)$ による f の積分を表し，$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d \langle \phi, E_H(\lambda)\psi \rangle$ は，加法的集合関数 $\langle \phi, E_H(\cdot)\psi \rangle : \mathfrak{B}^1 \to \mathbb{C}$（複素数全体の集合）による f のルベーグ–スティルチェス積分を表す．

したがって

$$\langle \phi, e^{-itH}\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda}\, d\,\langle \phi, E_H(\lambda)\psi \rangle\,, \quad \phi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{3.7}$$

ユニタリ作用素の族 $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ は**強連続1パラメータユニタリ群**を生成する．

ハミルトニアンの原理的性格は，それが系の状態の時間発展を記述するという点にある．すなわち，時刻0における系の状態を $\psi \in \mathcal{H}$ とすれば，時刻 $t \in \mathbb{R}$ での状態 $\psi(t)$ は

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi \tag{3.8}$$

によって与えられる（**状態の時間発展に関する公理**[5]）．

ところで，ユニタリ作用素 e^{-itH} は，より普遍的な数学的観点からは，パラメータ t を任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ へ拡張して考えるのが自然である．すなわち，任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して定義される線形作用素 e^{-izH}——(3.3)，(3.4) において $f(\lambda) = u_z(\lambda) := e^{-iz\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ の場合の $f(H)$（有界とは限らない）——を考察の対象とするのである．この型の作用素を H **に関する指数型作用素**という．実時間 t とのアナロジーからいえば，$\mathrm{Im}\, z$（z の虚部）$\neq 0$ のとき，指数型作用素 e^{-izH} は "虚数時間" z での "状態の時間発展" を司ると解釈される．

$z = t + is$ $(t, s \in \mathbb{R})$ とすれば，作用素解析により

$$u_z(H) = e^{-izH} = e^{-itH}\, e^{sH} \tag{3.9}$$

が成り立つ．特に，純虚数時間 $z = is$ $(s \neq 0)$ における "時間発展" は作用素 $u_{is}(H) = e^{sH}$ によって記述される．関数 $u_{is} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は実数値連続関数であるから，一般論[6]により，e^{sH} は自己共役である．しかも，$u_{is}(\lambda) > 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ であるから，e^{sH} は非負の自己共役作用素である．

本章の目的は，$\beta > 0$ として，純虚数時間 $z = -i\beta$ の場合（$s = -\beta$ の場合）の指数型作用素 $e^{-\beta H}$ を考察することである．概略は次のとおりである．まず，H が下に有界な場合，すなわち，ある実数 M があって $H \geq M$

---

[5] $\hbar := h/2\pi$（h はプランクの定数）$= 1$ の単位系を用いる（$\hbar$ を復活させた形は $\psi(t) = e^{-itH/\hbar}\psi$）．なお，筆者の哲学的観点からは，この時間発展は，通常の現象的次元における時間発展を表すものではない．この点に関する哲学的考察については，拙論文「量子現象によって開示される存在論的構造」（シェリング年報第14号 (2006)，95–103，晃洋書房）；同 "Fundamental symmetry principle in quantum mechanics and its philosophical phases" (*Symmetry: Culture and Science*, Vol.17 (2006), 141–157) を参照．両論文の原稿は，北海道大学学術成果コレクション (HUSCAP) http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/index.jsp にて閲覧またはダウンロード可能．

[6] 拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）の定理 3.8(vi)．

($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle \psi, H\psi \rangle \geq M\|\psi\|^2$, $\forall \psi \in D(H)$) が成り立つとき（量子力学に現れる多くのハミルトニアンがもつ基本的性質），$e^{-\beta H}$ は有界になることが証明される（命題 3.1）．さらに，作用素 $e^{-\beta H}$ の基本的性質を調べ，これが系の量子力学的性質のいくつかを担っていることを明らかにする．

ところで，$e^{-\beta H}$ という型の作用素は，量子統計力学において重要な役割を演じる．この文脈では，β は絶対温度 T の逆数 $1/T$ に比例するパラメータ，すなわち，逆温度パラメータを表す：$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$．ただし，$k_{\mathrm{B}}$ は**ボルツマン定数**と呼ばれる物理定数である[7]．

3.2　抽象的熱方程式と熱半群

前節の終わりに述べた事柄の考察に入る前に，ヒルベルト空間上の線形作用素に関する基本的な概念を復習しておく．一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A の**値域**を $\mathrm{Ran}\,(A)$ で表す：

$$\mathrm{Ran}\,(A) := \{A\psi \mid \psi \in D(A)\}. \tag{3.10}$$

複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，しばしば，zI（I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素）を単に z と記す．

A の**レゾルヴェント集合**を $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ と記す：

$$\rho(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} A - z \text{ は単射でその逆写像 } (A-z)^{-1} \text{ は} \\ \text{稠密に定義された有界作用素} \end{array} \right\}. \tag{3.11}$$

これを用いて，A の**スペクトル** $\sigma(A)$ が

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) \tag{3.12}$$

によって定義される．次の性質は周知の事実である[8]：

(σ.1) A が可閉ならば，$\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

(σ.2) A が自己共役ならば，$\sigma(A)$ は $\mathbb{R}$ の閉部分集合である．

(σ.3) A が下に有界な自己共役作用素ならば，$\sigma(A)$ は下に有界である．

---

[7] 量子統計力学については，拙著，『量子統計力学の数理』（共立出版，2008）を参照．

[8] 証明については，新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I』（朝倉書店，1999）の第 2 章を参照．

$\ker A := \{\psi \in D(A) \mid A\psi = 0\}$ を A の**核** (kernel) という．

複素数 λ があって，$\ker(A-\lambda) \neq \{0\}$ のとき，λ を A の**固有値**といい，$\ker(A-\lambda)$ をその**固有空間**という．A の固有値の全体を $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ と記し，A の**点スペクトル**と呼ぶ．明らかに $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A)$ である．

A を下に有界な自己共役作用素としよう．このとき，(σ.3) によってそのスペクトルの下限

$$E_0(A) := \inf \sigma(A) \tag{3.13}$$

は有限である．これと (σ.2) によって

$$E_0(A) \in \sigma(A) \tag{3.14}$$

が成り立つ．量子力学の文脈においては，A がハミルトニアンならば，$\sigma(A)$ は，当該の量子系のエネルギーの可能な値の全体を表すので，$E_0(A)$ は当該の量子系の最低エネルギーを表す．そこで，一般に，言葉使いを拡張して，$E_0(A)$ を A の**最低エネルギー**と呼ぶ．

$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 B（$D(B)$ は $\mathcal{H}$ に等しいとは限らない）に対して，その**作用素ノルム**を $\|B\|$ と記す．$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素で定義域が $\mathcal{H}$ に等しいものの全体を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ で表す．

以上の準備のもとで，作用素 $e^{-\beta H}$（$\beta > 0$）の解析に入る．次の命題は，$e^{-\beta H}$ の自己共役性，有界性，非有界性に関するものである：

【命題 3.1】 すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H}$ は非負の自己共役作用素である．さらに，次の (i), (ii) が成り立つ：

(i) H が下に有界ならば，任意の $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ であり

$$\left\|e^{-\beta H}\right\| = e^{-\beta E_0(H)} \tag{3.15}$$

が成立する．

(ii) H が下に有界でないならば，すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H}$ は非有界である．

証明 $e^{-\beta H}$ の自己共役性と非負性についてはすでにふれたので，(i), (ii) についてのみ証明を与える．

(i) $H \geq E_0(H) > -\infty$ であるので，H のスペクトル測度 E_H の台 $\mathrm{supp}\, E_H$ は半無限区間 $[E_0(H), \infty)$ に含まれる．したがって，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\beta\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 &= \int_{[E_0(H),\infty)} e^{-2\beta\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \\ &\leq \int_{[E_0(H),\infty)} e^{-2\beta E_0(H)}\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \\ &= e^{-2\beta E_0(H)}\|\psi\|^2 < \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

これは，(3.3) によって，$\psi \in D(e^{-\beta H})$ を意味する．ゆえに，$D(e^{-\beta H}) = \mathcal{H}$. また，(3.5) と (3.16) から $\|e^{-\beta H}\psi\| \leq e^{-\beta E_0(H)}\|\psi\|, \forall\psi \in \mathcal{H}$ が導かれる．したがって，$e^{-\beta H} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ かつ $\|e^{-\beta H}\| \leq e^{-\beta E_0(H)} \cdots (*)$ が成立する．

(3.15) を証明するために，任意の自然数 n に対して，$I_n := [E_0(H), E_0(H) + 1/n]$ とおくと，$E_H(I_n) \neq 0$ であることに注意する（$\because$ (3.14) によって $E_0(H) \in \sigma(H)$）．したがって，$E_H(I_n)$ の値域 $\mathrm{Ran}\,(E_H(I_n))$ に属する単位ベクトルがある．その1つを ϕ_n とすれば，$E_H(I_n)\phi_n = \phi_n$, $\|\phi_n\| = 1$ が成り立つ．これらの性質を用いると

$$\left\|e^{-\beta H}\phi_n\right\|^2 = \int_{I_n} e^{-2\beta\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\phi_n\|^2 \geq e^{-2\beta(E_0(H)+1/n)}$$

と評価される．また，$(*)$ により，$\left\|e^{-\beta H}\phi_n\right\|^2 \leq e^{-2\beta E_0(H)}$. したがって，$\lim_{n\to\infty}\left\|e^{-\beta H}\phi_n\right\|^2 = e^{-2\beta E_0(H)}$. これは，$\lim_{n\to\infty}\left\|e^{-\beta H}\phi_n\right\| = e^{-\beta E_0(H)}$ を意味する．ゆえに，$\left\|e^{-\beta H}\right\| = \sup_{\phi\in\mathcal{H},\ \|\phi\|=1}\left\|e^{-\beta H}\phi\right\| = e^{-\beta E_0(H)}$ が成立する．

(ii) H は下に有界でないから，$\sigma(H)$ は下に有界でない．したがって，狭義単調減少数列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $E_n \in \sigma(H)$ かつ $E_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．このとき，各 n に対して，半無限区間 $J_n := (-\infty, E_n]$ のスペクトル測度 $E_H(J_n)$ は零作用素ではない．したがって，$\psi_n \in \mathrm{Ran}\,(E_H(J_n))$ かつ $\|\psi_n\| = 1$ を満たすベクトル列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．$e^{-\beta H}$ のスペクトル表示により

$$\left\|e^{-\beta H}\psi_n\right\|^2 = \int_{J_n} e^{-2\beta\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\psi_n\|^2 \geq e^{-2\beta E_n} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

したがって，$e^{-\beta H}$ は有界でない．　■

以下，次を仮定する：

(H) 自己共役作用素 H は下に有界である．

このとき，命題 3.1 によって，各 $\beta \geq 0$ に対して（$\beta = 0$ の場合も含めて考える）

$$S_H(\beta) := e^{-\beta H} \tag{3.17}$$

は有界な非負自己共役作用素である．こうして，H から有界な非負自己共役作用素の族 $\{S_H(\beta)\}_{\beta \geq 0}$ が構成される．この族は，次の命題に述べる性質を有する：

【命題 3.2】 仮定 (H) のもとで次の (i)〜(v) が成立する．

(i) $$S_H(0) = I.$$

(ii) $$S_H(\alpha + \beta) = S_H(\alpha) S_H(\beta) = S_H(\alpha) S_H(\beta), \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

(iii) 対応 : $\beta \mapsto S_H(\beta)$ は強連続である．

(iv) 任意の $\psi \in D(H)$ に対して

$$\psi_H(\beta) := S_H(\beta)\psi \tag{3.18}$$

とすれば，$\psi_H(\beta)$ は β について強微分可能であり，微分方程式

$$\frac{d}{d\beta}\psi_H(\beta) = -H\psi_H(\beta) \tag{3.19}$$

を満たす．ただし，β に関する微分は強微分を表す．

(v) ベクトル $\psi \in \mathcal{H}$ について，$\text{s-}\lim_{\beta \to 0}(S_H(\beta) - I)\psi/\beta$ が存在するならば，$\psi \in D(H)$ である．ただし，s-lim は強極限を表す．

証明 (i) 容易．

(ii) 作用素解析の単純な応用から導かれる．

(iii) 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ と $\beta > 0$ および $\beta + \varepsilon \geq 0$ を満たす任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|S_H(\beta + \varepsilon)\psi - S_H(\beta)\psi\|^2 = \int_{[E_0(H), \infty)} f_\varepsilon(\lambda)\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2. \tag{3.20}$$

ただし

$$f_\varepsilon(\lambda) := e^{-2\beta\lambda} \left|e^{-\varepsilon\lambda} - 1\right|^2.$$

容易にわかるように，$|\varepsilon| \le \varepsilon_0$（$\varepsilon_0 > 0$ は定数）ならば

$$0 \le f_\varepsilon(\lambda) \le e^{-2\beta E_0(H)} e^{2\varepsilon_0|E_0(H)|} \left(e^{\varepsilon_0|E_0(H)|} + 1\right)^2, \quad \forall\lambda \ge E_0(H).$$

右辺は ε によらない（測度 $\|E_H(\cdot)\psi\|^2$ に関する）可積分関数（定数関数）であり，$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\lambda) = 0, \forall\lambda \ge E_0(H)$ を満たす．したがって，ルベーグの優収束定理により，(3.20) の右辺は，$\varepsilon \to 0$ のとき，0 に収束する．ゆえに，$S_H(\beta)$ は $(0,\infty)$ の各点で強連続である．$\beta = 0$ における強連続性は，上の議論で $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ の場合から導かれる．

(iv) (iii) と同様にして

$$\left\| \frac{S_H(\beta+\varepsilon) - S_H(\beta)}{\varepsilon}\psi + HS_H(\beta)\psi \right\|^2 = \int_{[E_0(H),\infty)} g_\varepsilon(\lambda)\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2. \tag{3.21}$$

ただし

$$g_\varepsilon(\lambda) := e^{-2\beta\lambda} \left| \frac{e^{-\varepsilon\lambda} - 1}{\varepsilon} + \lambda \right|^2.$$

容易に証明される不等式

$$|e^x - 1| \le |x| \max\{e^x, 1\}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

を用いると

$$\left| \frac{e^{-\varepsilon\lambda} - 1}{\varepsilon} \right| \le |\lambda| \max\{e^{-\varepsilon\lambda}, 1\} \le |\lambda|(e^{\varepsilon_0|E_0(H)|} + 1), \quad \lambda \ge E_0(H).$$

したがって

$$F(\lambda) := e^{-2\beta\lambda}(e^{\varepsilon_0|E_0(H)|} + 1)^2$$

とおけば

$$0 \le g_\varepsilon(\lambda) \le |\lambda|^2 F(\lambda)$$

が成り立つ．容易に確かめられるように，$C := \sup_{\lambda \ge E_0(H)} F(\lambda) < \infty$ である．したがって

$$\begin{aligned} \int_{[E_0(H),\infty)} |\lambda|^2 F(\lambda)\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 &\le C \int_{[E_0(H),\infty)} |\lambda|^2\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \\ &< \infty \quad (\because\ \psi \in D(H)). \end{aligned}$$

また，$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\lambda) = 0, \ \forall\lambda \geq E_0(H)$．したがって，ルベーグの優収束定理により，(3.21) の右辺は，$\varepsilon \to 0$ のとき，0 に収束する．ゆえに，$S_H(\beta)$ は $(0,\infty)$ の各点 β で強微分可能であり，(3.19) が成り立つ．$\beta = 0$ における強微分可能性は，上の議論で $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ の場合を考えることにより示される．

(v) $\phi_\beta := (S_H(\beta) - I)\psi/\beta$ とおけば，仮定により，$\text{s-}\lim_{\beta\to 0}\phi_\beta$ が存在するので，定数 $C > 0$ があって，$\|\phi_\beta\| \leq C, \forall\beta \in (0,a)$ が成り立つ（$a > 0$ は定数）．一方

$$\|\phi_\beta\|^2 = \int_{[E_0(H),\infty)} h_\beta(\lambda)\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2.$$

ただし

$$h_\beta(\lambda) = \left|\frac{e^{-\beta\lambda} - 1}{\beta}\right|^2.$$

ファトウの補題によって

$$\int_{[E_0(H),\infty)} \liminf_{\beta\to 0} h_\beta(\lambda)\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \leq \lim_{\beta\to 0} \|\phi_\beta\|^2 \leq C^2.$$

容易にわかるように

$$\liminf_{\beta\to 0} h_\beta(\lambda) = \lim_{\beta\to 0} h_\beta(\lambda) = |\lambda|^2.$$

したがって，$\int_{[E_0(H),\infty)} |\lambda|^2\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2 \leq C^2 < \infty$．ゆえに，$\psi \in D(H)$． ∎

微分方程式 (3.19) は特徴的な方程式である．そこで，次の定義を設ける：

一般に，$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 L（自己共役とは限らない）が与えられたとき，$\mathcal{H}$ 値関数 $\phi : [0,\infty) \to \mathcal{H}$ に関する微分方程式

$$\frac{d\phi(\beta)}{d\beta} = -L\phi(\beta) \tag{3.23}$$

を L から定まる**抽象的熱方程式**という[9]（β に関する微分は強微分の意味でとる）．ただし，この場合，当然のことながら，条件 $\phi(\beta) \in D(L), \forall\beta \geq 0$ は満たされているとする．

ベクトル $\phi \in D(L)$ を与えて，$\phi(0) = \phi$ を満たす，(3.23) の解 $\phi(\beta) \in D(L)$ を求める問題を抽象的熱方程式 (3.23) の**初期値問題**という．この場合，ϕ を**初期値**という．

[9] 名称の由来については，以下の例 3.5 を参照．

命題 3.2-(iv) は，H から定まる抽象的熱方程式の初期値問題の解が存在することを語る．

一般に，微分方程式においては，その解の存在と並んで，解が存在する場合には，それがいくつあるかを調べることが重要である．したがって，当然，抽象的熱方程式の初期値問題についてもこの問題を考える必要がある．次の定理は，抽象的熱方程式の初期値問題の解の一意性（解が存在すれば，ただ1つであること）に関するものである：

【定理 3.3】（抽象的熱方程式の初期値問題の解の一意性）　L は下に有界な対称作用素であるとする（自己共役である必要はない）．このとき，任意の $\phi \in D(L)$ に対して，抽象的熱方程式 (3.23) の解 $\phi(\beta)$ で $\phi(0) = \phi$ となるものは，存在すれば，ただ1つである．

証明　仮定により，$L \geq M$ となる実数 M がある．したがって，$\hat{L} := L - M$ とおけば，$\hat{L}$ は非負対称作用素である：$\hat{L} \geq 0$．$\phi(\beta), \psi(\beta)$ を抽象的熱方程式 (3.23) の解で，いずれの初期値も ϕ に等しいものとする（$\phi(0) = \psi(0) = \phi$）．このとき，$\chi(\beta) := \phi(\beta) - \psi(\beta)$ とおけば，容易に確かめられるように，$\chi(\beta)$ も (3.23) を満たし，$\chi(0) = 0$ が成り立つ．そこで，$\chi_M(\beta) := e^{M\beta}\chi(\beta)$ とおけば，微分演算に関するライプニッツ則により

$$\frac{d\chi_M(\beta)}{d\beta} = -\hat{L}\chi_M(\beta)$$

が導かれる．そこで，$f(\beta) := \|\chi_M(\beta)\|^2$ とおけば，これは，β について微分可能であり

$$f'(\beta) = \left\langle \frac{d\chi_M(\beta)}{d\beta}, \chi_M(\beta) \right\rangle + \left\langle \chi_M(\beta), \frac{d\chi_M(\beta)}{d\beta} \right\rangle = -2\langle \chi_M(\beta), \hat{L}\chi_M(\beta)\rangle$$

が得られる．これと $-\hat{L} \leq 0$ により，$f'(\beta) \leq 0$ となる．両辺を 0 から任意の $s > 0$ まで積分し，$f(0) = 0$ を用いれば，$f(s) \leq 0$ を得る．これと f の定義からしたがう不等式 $f(s) \geq 0$ によって，$f(s) = 0$ となる．したがって，$\chi_M(s) = 0$, $\forall s > 0$．これは，$\chi(s) = 0, \forall s > 0$ を意味するから，$\phi(s) = \psi(s), \forall s > 0$ がしたがう．よって題意が成立する．■

下に有界な自己共役作用素 H から定まる抽象的熱方程式の解の存在（既述）と定理 3.3 から次の結果が得られる：

【系 3.4】(抽象的熱方程式の初期値問題の解の存在と一意性) L が下に有界な自己共役作用素ならば，任意の $\phi \in D(L)$ に対して，(3.23) の解 $\phi(\beta)$ で $\phi(\beta)=\phi$ となるものはただ 1 つ存在し，$\phi(\beta)=e^{-L\beta}\phi,\ \forall\beta\geq 0$ によって与えられる．

■**例 3.5** d を自然数とし，$\mathbb{R}^d=\{x=(x_1,\cdots,x_d)\mid x_j\in\mathbb{R},\ j=1,\cdots,d\}$ の中の有界な連結開集合 Ω を考える．$[0,\infty)\times\Omega=\{(t,x)\mid t\geq 0,\ x\in\Omega\}$ 上の実数値関数 u に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=D\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u(t,x) \tag{3.24}$$

($D>0$ は定数) を**熱方程式**または**熱伝導方程式**という．上式の右辺に現れている作用素 $\Delta_{\text{formal}}:=\sum_{j=1}^{d}\partial^2/\partial x_j^2$ を**形式的ラプラシアン**または**形式的ラプラス作用素**と呼ぶ．

偏微分方程式 (3.24) は，物理的には，たとえば，Ω の中に密度が一定の媒質があり，この媒質の内部で熱の発生がない場合，時刻 $t\in\mathbb{R}$, 点 $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\Omega$ における媒質の温度 $T(t,x)$ がしたがう方程式を表す ($u(t,x)=T(t,x)$ の場合)．これが方程式の名称の由来である．無論，この文脈，すなわち，u を媒質の温度を表す関数と解釈する文脈では，方程式 (3.24) は巨視的・現象論的な物理に関わる方程式であり，量子力学的なものではない[10]．

形式的ラプラシアン Δ_{formal} は，適当な定義域 (境界条件) を設定することにより，Ω 上の (ルベーグ測度に関して) 2 乗可積分なボレル可測関数の同値類から形成されるヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ 上の非正な自己共役作用素として実現される (ただし，一意的ではない)[11]．そのような自己共役実現の 1 つを Δ_Ω とすれば，$H_\Omega:=-\Delta_\Omega$ は非負自己共役作用素である．$\int_\Omega|u(t,x)|^2\,dx<\infty,\ \forall t\geq 0$ ならば，各 $t\geq 0$ に対して，写像 $\widetilde{u}:[0,\infty)\to L^2(\Omega)$ が $\widetilde{u}(t)(x)$ ($\widetilde{u}(t)$ の x における値) $:=u(t,x)$, a.e.$x\in\Omega$ によって定義される．このとき，方程式 (3.24) のヒルベルト空間版として微分方程式

$$\frac{\partial\widetilde{u}(t)}{\partial t}=-DH_\Omega\widetilde{u}(t) \tag{3.25}$$

を立てることができる．この方程式の抽象版が方程式 (3.23) である (パラメータ t は β に変える)．系 3.4 を $\mathcal{H}=L^2(\Omega)$, $L=DH_\Omega$ として応用することにより，任意の $u_0\in D(H_\Omega)$ に対して，熱方程式 (3.25) の解 $\widetilde{u}(t)$ で $\widetilde{u}(0)=u_0$ となるものは，ただ 1 つ存在し

$$\widetilde{u}(t)=e^{-tDH_\Omega}u_0,\quad \forall t\geq 0 \tag{3.26}$$

---

[10] 熱方程式は，哲学的にいえば，同一の数学的理念が異なった現象的次元ないし相で現れる例の 1 つなのである．

[11] 拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の例 2.11 や第 2 章演習問題 14 を参照．

によって与えられることがわかる．この場合

$$u(t,x) = \left(e^{-tDH_\Omega}u_0\right)(x), \quad \text{a.e.}x \in \Omega$$

となる．右辺の関数を詳細に解析することにより，$u(t,x)$ の性質を調べることができる．

命題 3.2 の (i)〜(iii) に述べられた性質は，半無限区間 $[0,\infty)$ によって添え字が付けられた有界線形作用素の族が有する，ある一般的概念を示唆する：

【定義 3.6】 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の族 $\{S(\beta)\}_{\beta\geq 0}$ は，次の条件 (S.1), (S.2) を満たすとき，**強連続 1 パラメータ半群**と呼ばれる：

(S.1) $S(0) = I$ かつ $S(\alpha+\beta) = S(\alpha)S(\beta), \quad \alpha,\beta \geq 0.$
(S.2) （強連続性）対応：$\beta \mapsto S(\beta)$ は強連続である．

特に，各 $S(\beta)$ が自己共役であるとき，$\{S(\beta)\}_{\beta\geq 0}$ を**自己共役半群**という．

実数の加法に関する交換法則 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha,\beta \geq 0$ を用いると，条件 (S.1) は，任意の $\alpha,\beta \geq 0$ に対して，$S(\alpha)$ と $S(\beta)$ は可換であること，すなわち，$S(\alpha)S(\beta) = S(\beta)S(\alpha)$ を意味する．したがって，(S.1) は，$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\{S(\beta)\}_{\beta\geq 0}$ が作用素の積演算に関して，I を単位元とする可換半群をなすことを意味する[12]．この理由から，条件 (S.1) は $\{S(\beta)\}_{\beta\geq 0}$ の**半群特性**と呼ばれる．"強連続 1 パラメータ半群" という呼称は，半群特性と (S.2) にちなむものである．

自己共役作用素 H から定まる有界線形作用素の族 $\{S_H(\beta)\}_{\beta\geq 0}$ は自己共役半群の例である．この場合，上に見たように，$\mathcal{H}$ 値関数 $\psi_H : [0,\infty) \to \mathcal{H}$ が H から定まる抽象的熱方程式を満たすことにちなんで，$\{S_H(\beta)\}_{\beta\geq 0} = \left\{e^{-\beta H}\right\}_{\beta\geq 0}$ を H によって生成される**熱半群** (heat semi-group) と呼ぶ．便宜上，$e^{-\beta H}$ を H に付随する**熱作用素**という．

[12] 一般に，集合 X において，演算：$X \times X \ni (x,y) \mapsto x \circ y \in X$ が定義されていて，結合則 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $x,y,z \in X$ が成り立つとき，X を**半群** (semi-group) という．この性質に加えて，元 $e \in X$ があって，$x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in X$ が成り立つとき，e を半群 X の**単位元**という．すべての $x,y \in X$ について $x \circ y = y \circ x$ が成り立つとき，X は**可換半群**と呼ばれる．半無限区間 $[0,\infty)$ は，加法の演算：$[0,\infty) \times [0,\infty) \ni (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \circ \beta = \alpha+\beta \in [0,\infty)$ に関して，0 を単位元とする可換半群をなす．他方，$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ は作用素の積 $(A \circ B = AB, A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ に関して，恒等作用素 I を単位元とする半群をなす．(S.1) の性質は，対応 $S : \beta \mapsto S(\beta)$ によって定義される写像 $S : [0,\infty) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が半群構造を保存すること—$[0,\infty)$ の半群演算（加法）に $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の半群演算（作用素の積演算）が対応すること—を意味する．このような写像は，半群 $[0,\infty)$ の $\mathcal{H}$ 上での**表現** (representation) と呼ばれる．

3.3　最低エネルギーの表示

自己共役作用素 H の最低エネルギー $E_0(H)$ は熱作用素 $e^{-\beta H}$ を用いて表されうることを示そう．そのために，$\mathcal{H}$ の部分集合

$$\mathcal{E}(H) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある定数 } \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\psi) > 0 \text{ が存在して任意の} \\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \text{ に対して } E_H([E_0(H), E_0(H) + \varepsilon))\psi \neq 0 \end{array} \right\} \tag{3.27}$$

を導入する．すでに指摘したように，$E_0(H) \in \sigma(H)$ であるから，$\mathcal{E}(H) \neq \emptyset$ である．

【定理 3.7】　任意の $\psi \in \mathcal{E}(H)$ に対して

$$E_0(H) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{\log\left\langle \psi, e^{-\beta H}\psi \right\rangle}{\beta}. \tag{3.28}$$

証明　$\hat{H} := H - E_0(H)$ とおけば，$\hat{H}$ は非負の自己共役作用素であり，$E_0(\hat{H}) = 0$. (3.28) は

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\log\left\langle \psi, e^{-\beta \hat{H}}\psi \right\rangle}{\beta} = 0 \tag{3.29}$$

と同値である．そこで，(3.29) を証明しよう．命題 3.1-(i) によって，$\|e^{-\beta\hat{H}}\| = 1$. したがって，$\left\langle \psi, e^{-\beta\hat{H}}\psi \right\rangle \leq \|\psi\|^2$．これは

$$\limsup_{\beta\to\infty} \frac{\log\left\langle \psi, e^{-\beta \hat{H}}\psi \right\rangle}{\beta} \leq 0 \tag{3.30}$$

を意味する．一方，任意のボレル集合 $J \in \mathfrak{B}^1$ に対して，$E_{\hat{H}}(J) = E_H(\{\lambda + E_0(H) \mid \lambda \in J\})$ に注意すれば，作用素解析により

$$\left\langle \psi, e^{-\beta\hat{H}}\psi \right\rangle \geq \int_{[0,\varepsilon)} e^{-\beta\lambda}\, d\|E_{\hat{H}}(\lambda)\psi\|^2 \geq e^{-\beta\varepsilon} C_\varepsilon.$$

ただし，$C_\varepsilon := \|E_{\hat{H}}([0,\varepsilon))\psi\|^2$ とおいた．$\psi \in \mathcal{E}(H)$ により，十分小さなすべての $\varepsilon > 0$ に対して $C_\varepsilon > 0$ である．したがって

$$\frac{\log\left\langle \psi, e^{-\beta\hat{H}}\psi \right\rangle}{\beta} \geq -\varepsilon + \frac{\log C_\varepsilon}{\beta}.$$

両辺の下極限 $\liminf_{\beta\to\infty}$ をとれば，$\liminf_{\beta\to\infty}\log\langle\psi, e^{-\beta\hat{H}}\psi\rangle/\beta \geq -\varepsilon$ となる．そこで，$\varepsilon\to+0$ とすれば，$\liminf_{\beta\to\infty}\log\langle\psi, e^{-\beta\hat{H}}\psi\rangle/\beta \geq 0$ が得られる．これと (3.30) を合わせれば (3.29) が導かれる．■

3.4　基底状態

$E_0(H)$ が H の固有値のとき，すなわち，$H\psi_0 = E_0(H)\psi_0$ を満たす零でないベクトル $\psi_0 \in D(H)$ が存在するとき，H は「基底状態をもつ」といい，ψ_0 を H の 1 つの**基底状態** (ground state) と呼ぶ．換言すれば，H が基底状態をもつとは，$H - E_0(H)$ の核 $\ker(H - E_0(H))$ の次元 $\dim\ker(H - E_0(H))$ が 0 でないということであり，H の基底状態とは $\ker(H - E_0(H))$ の非零元のことである．

定理 3.7 の系として，次の結果を得る：

【系 3.8】 H は基底状態をもつとし，H の任意の基底状態を ψ_0 とする．このとき，$\langle\psi_0, \psi\rangle \neq 0$ を満たす任意のベクトル $\psi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ に対して (3.28) が成り立つ．

証明　仮定をみたす ψ が $\mathcal{E}(H)$ の元であることを示せばよい．仮に，$\psi \notin \mathcal{E}(H)$ としてみよう．すると，ある $\delta>0$ が存在して $E_H([E_0(H), E_0(H)+\delta))\psi = 0\cdots(*)$ が成り立つ．したがって，$\langle E_H([E_0(H), E_0(H)+\delta))\psi_0, \psi\rangle = 0\cdots(**)$ が導かれる．一方，$E_H(\{E_0(H)\})\psi_0 = \psi_0$ であるから，$E_H([E_0(H), E_0(H)+\delta))\psi_0 = \psi_0 + E_H((E_0(H), E_0(H)+\delta))\psi_0$．これと $(*)$ から出る式 $E_H((E_0(H), E_0(H)+\delta))\psi = 0$ によって，$(**)$ の左辺は $\langle\psi_0, \psi\rangle$ に等しいことがわかる．したがって，$\langle\psi_0, \psi\rangle = 0$．だが，これは仮定に反する．■

核 $\ker(H - E_0(H))$ への正射影作用素を $P_0(H)$ とする．$E_0(H)$ が H の固有値でなければ，$\ker(H - E_0(H)) = \{0\}$ であるから，$P_0(H) = 0$ である．

【定理 3.9】

$$\text{s-}\lim_{\beta\to\infty} e^{-\beta(H-E_0(H))} = P_0(H). \tag{3.31}$$

ただし，ここでの s-lim は有界線形作用素の強極限を表す[13].

証明 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，作用素解析により（$P_0(H) = E_H(\{E_0(H)\}) = \chi_{\{E_0(H)\}}(H)$ に注意[14]）

$$\left\|(e^{-\beta(H-E_0(H))} - P_0(H))\psi\right\|^2 = \int_{(E_0(H),\infty)} e^{-2\beta(\lambda - E_0(H))}\, d\|E_H(\lambda)\psi\|^2.$$

容易にわかるように，$0 < e^{-2\beta(\lambda-E_0(H))} < 1$, $\forall\beta > 0$, $\forall\lambda > E_0(H)$ かつ $e^{-2\beta(\lambda-E_0(H))} \to 0$ $(\beta \to \infty)$. したがって，ルベーグの優収束定理により，上式の右辺は，$\beta \to \infty$ のとき，0 に収束する. ∎

【系 3.10】 ベクトル $\phi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ が

$$\inf_{\beta \geq 0} \left\langle \phi_0, e^{-\beta(H-E_0(H))}\phi_0 \right\rangle > 0 \tag{3.32}$$

を満たすならば，$P_0(H)\phi_0$ は H の基底状態である.

証明 (3.32) の左辺を a とおく. $f(\beta) := \left\langle \phi_0, e^{-\beta(H-E_0(H))}\phi_0 \right\rangle$ とすれば，$f(\beta) > 0$ であり，$f(\beta)$ は β について単調減少である. したがって，$\lim_{\beta\to\infty} f(\beta) = a$. 一方，定理 3.9 によって，$\lim_{\beta\to\infty} f(\beta) = \langle \phi_0, P_0(H)\phi_0 \rangle = \|P_0(H)\phi_0\|^2$. したがって，$\|P_0(H)\phi_0\|^2 = a > 0$. ゆえに $P_0(H)\phi_0 \neq 0$. これと $P_0(H)\phi_0 \in \ker(H - E_0(H))$ により，$P_0(H)\phi_0$ は H の基底状態である. ∎

任意のベクトル $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ に対して，$e^{-\beta H}\psi \neq 0, \forall\beta \geq 0$ であるから，ベクトル

$$\psi(\beta) := \frac{e^{-\beta H}\psi}{\|e^{-\beta H}\psi\|} = \frac{e^{-\beta H}\psi}{\sqrt{\langle \psi, e^{-2\beta H}\psi \rangle}} \tag{3.33}$$

が定義され，これは単位ベクトルである. 自己共役作用素 H の基底状態が縮退していない場合，すなわち，$\dim\ker(H - E_0(H)) = 1$ の場合には，$\psi(\beta)$ は次の定理に述べる意味で，基底状態の近似形──近似的基底状態──を与える：

---

[13] $T_n, T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $(n \in \mathbb{N})$ がすべての $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n\psi = T\psi$（ベクトルの強収束）を満たすとき，$\{T_n\}_n$ は T に**強収束**するといい，T をその**強極限** (strong limit) と呼ぶ. この場合，$T = \text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n$ と記す.

[14] 任意の集合 X の部分集合 D に対して，$\chi_D : X \to \mathbb{R}$ は D の定義関数を表す：$\chi_D(x) = 1$, $x \in D$；$\chi_D(x) = 0$, $x \notin D$.

【定理 3.11】 $\dim\ker(H-E_0(H))=1$ とし，$\psi_0\in\ker(H-E_0(H))$, $\|\psi_0\|=1$ とする．このとき，$\langle\psi_0,\psi\rangle>0$ を満たす任意のベクトル $\psi\in\mathcal{H}$ に対して

$$\psi_0=\lim_{\beta\to\infty}\psi(\beta). \tag{3.34}$$

証明 いまの場合では，$P_0(H)\psi=\langle\psi_0,\psi\rangle\,\psi_0$, $\forall\psi\in\mathcal{H}$ が成り立つ．これと (3.31) によって，$\lim_{\beta\to\infty}e^{-\beta(H-E_0(H))}\psi=\langle\psi_0,\psi\rangle\,\psi_0\cdots(*)$ となる．したがって，$\left\langle\psi,e^{-2\beta(H-E_0(H))}\psi\right\rangle\to|\langle\psi_0,\psi\rangle|^2$ $(\beta\to\infty)$．仮定により，$\langle\psi_0,\psi\rangle>0$ であるから，$\|e^{-\beta(H-E_0(H))}\psi\|\to\langle\psi_0,\psi\rangle$ $(\beta\to\infty)$ を得る．これと $(*)$ により

$$\psi_0=\lim_{\beta\to\infty}\frac{e^{-\beta(H-E_0(H))}\psi}{\langle\psi_0,\psi\rangle}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{e^{-\beta(H-E_0(H))}\psi}{\|e^{-\beta(H-E_0(H))}\psi\|}$$

右辺の分子と分母の共通数因子 $e^{\beta E_0(H)}$ は打ち消しあうので，(3.34) が得られる． ∎

公式 (3.34) において重要な点の1つは，右辺に最低エネルギー $E_0(H)$──多くの場合，陽に求めることができない──が入っていないことである．

関連図書

[1] 新井朝雄，『ヒルベルト空間と量子力学』，共立出版，1997.

[2] 新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[3] 新井朝雄，『量子統計力学の数理』，共立出版，2008.

[4] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I，II』，朝倉書店，1999.

[5] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[6] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[7] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932. 邦訳：J.v. ノイマン，『量子力学の数学的基礎』(井上 健・広重 徹・恒藤敏彦 訳)，みすず書房，1957.

第4章

有限自由度の量子力学における汎関数積分法

4.1 シュレーディンガー型作用素

量子力学には大きく分けて2つの型がある．すなわち，**有限自由度の量子力学**—内部自由度（スピン，アイソスピンなど）および外部自由度（時空的自由度）が有限である量子力学—と**無限自由度の量子力学**である．本章では，前者の量子力学のうち，非相対論的量子力学を考察の対象とし，その汎関数積分論的側面を論じる．

d を任意の自然数とし，d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ 内に，粒子的描像から見て，質量 $m > 0$ の1個の量子的粒子が存在する量子系を考える．簡単のため，この量子的粒子は内部自由度をもたないとする．この場合，この量子系の状態のヒルベルト空間として $L^2(\mathbb{R}^d)$ がとれる．量子的粒子は，実数値ボレル可測関数 $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ によって記述されるポテンシャルの作用のもとにあるとしよう[1]．このとき，古典力学との対応を考慮する正準量子化の処方によれば，系のハミルトニアンは，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の**シュレーディンガー型作用素**

$$H_V := -\frac{1}{2m}\Delta + V \tag{4.1}$$

によって定義される．ただし，Δ は d 次元の一般化されたラプラシアンであり，

[1] 古典力学の文脈では，V が微分可能な場合，ベクトル場 $-(\partial V/\partial x_1, \cdots, \partial V/\partial x_d)$ が粒子に働く力の場を表す．

V は関数 V による掛算作用素を表す[2]．$V=0$ の場合のハミルトニアン

$$H_0 := -\frac{1}{2m}\Delta \tag{4.2}$$

は，ポテンシャルの作用がない場合の量子的粒子，すなわち，自由粒子の全エネルギーを表すので，**自由ハミルトニアン**と呼ばれる．他方，$V \neq 0$ の場合の H_V を**相互作用 V の入ったハミルトニアン**という．H_0 は非負の自己共役作用素である．

シュレーディンガー型作用素 H_V の定義域 $D(H_V)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密とは限らない．だが，もし，$D(H_V)$ が稠密ならば，H_V が対称作用素であることは容易にわかる．しかし，これだけでは，もちろん，H_V の本質的自己共役性は保証されない．それは V の性質に依存する．ここでの目的は，H_V の本質的自己共役性を論じることではないので，さしあたり，次の条件のもとで論述を進める：

(H) $D(H_V)$ は稠密であり，H_V は本質的に自己共役かつ下に有界である．

この条件のもとで，H_V の閉包 $\overline{H}_V$ は自己共役であり，下に有界である[3]．したがって，$\overline{H}_V$ は熱半群 $\left\{e^{-\beta\overline{H}_V}\right\}_{\beta\geq 0}$ を生成する．この型の熱半群を**シュレーディンガー半群**と呼ぶ．

以下，V が $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度に関して本質的に下に有界であること（すなわち，ある定数 $V_0 \in \mathbb{R}$ があって，$V(x) \geq V_0$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$ が成り立つこと[4]）を単に「V は下に有界である」という．

次の定理は，熱作用素 $e^{-\beta\overline{H}_V}$ の詳しい解析にとって重要である：

【定理 4.1】 条件 (H) のもとで，V が下に有界ならば，すべての $\beta > 0$ に対して

$$e^{-\beta\overline{H}_V} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\beta H_0/n}e^{-\beta V/n}\right)^n. \tag{4.3}$$

が成り立つ．ただし，s-lim は有界線形作用素の強極限を表す．

---

[2] 一般に，ヒルベルト空間上の線形作用素 A, B の和 $A+B$ の定義域は，特に断らないかぎり，$D(A)\cap D(B)$ である（定義）．したがって，$D(H_V) = D(\Delta)\cap D(V)$ である．

[3] 一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 S が $S \geq a$（$a \in \mathbb{R}$ は定数）ならば，$\bar{S} \geq a$ である（証明は容易）．

[4] 特に断らないかぎり，「a.e.$x \in \mathbb{R}^d$」は「$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度に関してほとんどいたるところ (almost everywhere) の点 $x \in \mathbb{R}^d$」を意味する．

証明 付録 C の定理 C.22（トロッター–加藤の積公式）を $A = H_0, B = V$ として応用すればよい. ∎

ポテンシャル V が本質的に有界（すなわち, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$）ならば, 加藤–レリッヒの定理（付録 C の定理 C.15）の応用により, H_V は自己共役で下に有界である（$D(H_V) = D(H_0)$）. したがって, この場合, 条件 (H) は満たされる.

ここで, 参考のために, V が必ずしも本質的に有界でない場合において, 条件 (H) が成立するための十分条件の 1 つを記述しておこう.

$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 f が, ある $p \in [1, \infty)$ とすべての $R > 0$ に対して, $\int_{|x| \le R} |f(x)|^p \, dx < \infty$ を満たすとき, f は**局所的に p 乗可積分**であるという. このような関数の全体を $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ で表す.

【定理 4.2】 $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$（上の定義で $p = 2$ の場合）かつ V は下に有界であるとする. このとき, H_V は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり, $\overline{H}_V$ は下に有界である[5].

この定理の簡単な応用を 1 つ述べておく. $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体を $C(\mathbb{R}^d)$ で表し, $\mathbb{R}^d$ 上の下に有界な実数値連続関数の全体を $C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とする：

$$C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid f \text{ は実数値で下に有界}\}. \tag{4.4}$$

【定理 4.3】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ ならば, H_V は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり, $\overline{H}_V$ は下に有界である.

証明 次の包含関係と定理 4.2 による：

$$C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d) \subset C(\mathbb{R}^d) \subset L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d). \tag{4.5}$$

∎

(4.3) の右辺は, 自由ハミルトニアン H_0 に付随する熱作用素 $e^{-\beta H_0/n}$ と, V に付随する熱作用素 $e^{-\beta V/n}$ を基本因子としてできている. そこで, これらの作用素の性質を調べる. 非負自己共役作用素 $e^{-\beta V}$ は, 関数：$x \mapsto e^{-\beta V(x)}$, $x \in \mathbb{R}^d$ による掛算作用素であるので, さしあたり, "わかった" ものとしてよ

[5] この定理の証明については, 拙著,『量子現象の数理』(朝倉書店, 2006) の定理 2.25 を参照されたい.

い．非自明なのは，作用素 $e^{-\beta H_0}$ の性質である．これについては節を改めて論じる．

4.2 熱作用素 $e^{-\beta H_0}$ の積分核表示

まず，H_0 に関する基本的事実を想起しておこう．そのスペクトルについては

$$\sigma(H_0) = [0, \infty) \tag{4.6}$$

が成り立つ．したがって

$$E_0(H_0) = 0. \tag{4.7}$$

ゆえに，命題 3.1-(i) によって

$$\|e^{-\beta H_0}\| = 1 \tag{4.8}$$

が成立する．

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換を $\mathcal{F}_d$ とする：

$$(\mathcal{F}_d f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} f(x)\, dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \text{a.e.}k \in \mathbb{R}^d. \tag{4.9}$$

ただし，右辺の積分は L^2 収束（平均 2 乗収束）の意味でとる．このとき，$\mathcal{F}_d$ はユニタリ作用素（変換）であり

$$\mathcal{F}_d H_0 \mathcal{F}_d^{-1} = \frac{k^2}{2m} \quad (\text{掛算作用素}) \tag{4.10}$$

が成り立つ[6]．

さて，各 $\beta > 0$ に対して，関数 $P_\beta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$P_\beta(x, y) := \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2} e^{-m|x-y|^2/2\beta}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{4.11}$$

によって定義する．

---

[6] 証明については，たとえば，拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）の定理 5.11 を参照．

【定理 4.4】 すべての $\beta > 0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left(e^{-\beta H_0} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_\beta(x,y) f(y)\, dy, \quad \text{a.e.}x \in \mathbb{R}^d \tag{4.12}$$

が成り立つ.

証明 (4.10) と作用素解析のユニタリ共変性[7]により

$$\mathcal{F}_d\, e^{-\beta H_0} \mathcal{F}_d^{-1} = e^{-\beta \mathcal{F}_d H_0 \mathcal{F}_d^{-1}} = e^{-\beta k^2/2m} \quad (\text{掛算作用素}).$$

したがって

$$e^{-\beta H_0} = \mathcal{F}_d^{-1}\, e^{-\beta k^2/2m} \mathcal{F}_d. \tag{4.13}$$

ゆえに，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left(e^{-\beta H_0} f\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\, e^{-\beta k^2/2m} \hat{f}(k)\, dk. \tag{4.14}$$

ただし

$$\hat{f} := \mathcal{F}_d f \tag{4.15}$$

は f のフーリエ変換である．簡単な不等式

$$|ab| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{4.16}$$

により

$$|e^{ikx} e^{-\beta k^2/2m} \hat{f}(k)| \le \frac{1}{2}\left(e^{-\beta k^2/m} + |\hat{f}(k)|^2\right)$$

であるから，$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{ikx} e^{-\beta k^2/2m} \hat{f}(k)|\, dk < \infty$．したがって，(4.14) の右辺の積分は—もともとは L^2 収束の意味でとるのであったが—普通のルベーグ積分の意味でとることができる[8]．$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\, e^{-\beta k^2/2m} \hat{f}(k)\, dk$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\, e^{-\beta k^2/2m} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iky} f(y)\, dy \right) dk$$

---

[7] A をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素，U を $\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ へのユニタリ変換，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を任意のボレル可測関数とすれば，作用素の等式 $Uf(A)U^{-1} = f(UAU^{-1})$ が成り立つ．これを**作用素解析のユニタリ共変性**と呼ぶ.

[8] 拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) の定理 5.4 を参照.

であり

$$|e^{ikx}\, e^{-\beta k^2/2m}\, e^{-iky} f(y)| = e^{-\beta k^2/2m}|f(y)|$$

は直積測度 $dk \otimes dy$ に関して可積分である．したがって，フビニの定理を応用することができ

$$\left(e^{-\beta H_0} f\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik(x-y)}\, e^{-\beta k^2/2m} dk\right) f(y)\, dy$$

が得られる．k についての積分は，公式 (1.73) の単純な応用により

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik(x-y)}\, e^{-\beta k^2/2m}\, dk = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{d/2} e^{-m|x-y|^2/2\beta} \tag{4.17}$$

と計算される．したがって，(4.12) が成立する．

任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，次のような極限移行の議論を行えばよい．各 $R > 0$ に対して，f_R を $f_R(x) := f(x)$, $|x| \le R$；$f_R(x) := 0$, $|x| > R$ によって定義すれば，$f_R \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ であるから，前半の結果により

$$\left(e^{-\beta H_0} f_R\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_\beta(x,y) f_R(y)\, dy.$$

各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$|P_\beta(x,y) f_R(y)| \le P_\beta(x,y)|f(y)| \le \frac{1}{2}(P_\beta(x,y)^2 + |f(y)|^2)$$

であり，最右辺は R によらない可積分関数である．また，$\lim_{R\to\infty} P_\beta(x,y) f_R(y) = P_\beta(x,y) \times f(x)$, a.e.$x$．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{R\to\infty}\left(e^{-\beta H_0} f_R\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_\beta(x,y) f(y)\, dy.$$

他方，容易にわかるように，$\|f_R - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(R \to \infty)$．作用素 $e^{-\beta H_0}$ は有界であるから，$\left\|e^{-\beta H_0} f_R - e^{-\beta H_0} f\right\| \to 0$ $(R \to \infty)$．したがって，単調増加数列 $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ で $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たすものがあって $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\beta H_0} f_{R_n}\right)(x) = \left(e^{-\beta H_0} f\right)(x)$, a.e.$x$．ゆえに，a.e.$x$ に対して，(4.12) が成立する． ∎

公式 (4.12) は，熱作用素 $e^{-\beta H_0}$ が関数 $P_\beta(x,y)$ を積分核とする積分作用素で表されることを語る．積分核 $P_\beta(x,y)$ を H_0 に付随する**熱核** (heat kernel) という．

熱作用素 $e^{-\beta H_0}$ の積分核表示 (4.12) からいくつかの興味深い性質が導かれる：

【定理 4.5】

(i) $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が実数値ならば，すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H_0} f$ も実数値である．

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が非負 (i.e. $f \geq 0$, a.e.) ならば，すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H_0} f$ も非負である：$e^{-\beta H_0} f \geq 0$, a.e..

(iii) $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が非負かつ $f \neq 0$（$L^2(\mathbb{R}^d)$ の元として）ならば，すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-tH_0} f > 0$ a.e..

(iv) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば

$$\left|\left(e^{-\beta H_0} f\right)(x)\right| \leq \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \beta > 0. \tag{4.18}$$

さらに

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta^{d/2} \left\langle f, e^{-\beta H_0} f \right\rangle = (2m\pi)^{d/2} \left|\hat{f}(0)\right|^2. \tag{4.19}$$

ただし，$\hat{f}$ は f のフーリエ変換を表す．

証明 (i) と (ii) (4.12) と $P_\beta(x, y) > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ による．

(iii) $L^2(\mathbb{R}^d)$ の元として $f \neq 0$ であるから，ルベーグ測度が正のボレル集合 A があって，$f(y) > 0$, $y \in A$. したがって

$$\left(e^{-\beta H_0} f\right)(x) \geq \int_A P_\beta(x, y) f(y)\, dy > 0, \quad \text{a.e.} x \in \mathbb{R}^d.$$

(iv) (4.18) は (4.12) と $e^{-m|x-y|^2/2\beta} \leq 1$ による．フーリエ変換により

$$\begin{aligned}
(4.19) \text{ の左辺} &= \beta^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\hat{f}(k)\right|^2 e^{-\beta k^2/2m}\, dk \\
&= (2m)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-k^2} \left|\hat{f}(\sqrt{2m}k/\sqrt{\beta})\right|^2 dk \\
&\qquad\qquad (\text{変数変換 } k' = \sqrt{\beta/2m}k \text{ を行う}).
\end{aligned}$$

いま，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であるから，$\hat{f}$ は有界な連続関数であり，

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

したがって

$$e^{-k^2} \left|\hat{f}(\sqrt{2m}k/\sqrt{\beta})\right|^2 \leq e^{-k^2} \left\|\hat{f}\right\|_\infty^2.$$

また，$\lim_{\beta\to\infty} e^{-k^2}\left|\hat{f}(\sqrt{2m}k/\sqrt{\beta})\right|^2 = e^{-k^2}\left|\hat{f}(0)\right|^2, \forall k \in \mathbb{R}^d$．したがって，ルベーグの優収束定理と $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-k^2}\,dk = \pi^{d/2}$ により，(4.19) が得られる． ∎

(4.19) は，$\hat{f}(0) \neq 0$ ならば，$\beta \to \infty$ の極限――量子統計力学の文脈では低温極限（3.1 節の最終段落を参照）――において $\langle f, e^{-\beta H_0} f\rangle$ が $\beta^{-d/2}$ のオーダーで減衰することを語る．

一般に，2 つのボレル可測関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$ に対して，積分

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy, \quad \text{a.e.}x \in \mathbb{R}^d \tag{4.20}$$

が存在するとき，関数 $f * g$ を f と g の**合成積** (convolution) という．

関数 $P_\beta(x,y)$ は $x - y$ だけの関数であることに注目し

$$G_\beta(x) := \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2} e^{-m|x|^2/2\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{4.21}$$

とおけば

$$P_\beta(x,y) = G_\beta(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{4.22}$$

であり，公式 (4.12) は

$$e^{-\beta H_0} f = G_\beta * f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{4.23}$$

と書ける．

明らかに

$$0 < G_\beta(x) \leq \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.24}$$

次の事実に注目しよう：

【命題 4.6】 各 $\beta > 0$ と任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$G_\beta * f$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である．

証明　任意の $x, h \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$(G_\beta * f)(x+h) - (G_\beta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F_h(x,y)\,dy$$

と書ける．ただし

$$F_h(x,y) := \left(e^{-mh(x-y)/\beta} e^{-mh^2/2\beta} - 1\right) G_\beta(x-y) f(y).$$

$\varepsilon_0 > 0$ を定数とし，$|h| < \varepsilon_0$ とすれば

$$|F_h(x,y)| \le e^{m\varepsilon_0|x-y|/\beta} G_\beta(x-y)|f(y)| + G_\beta(x-y)|f(y)|.$$

右辺は h によらない（y についての）可積分関数であり[9]，$\lim_{h\to 0} F_h(x,y) = 0$, $\forall$a.e.$y \in \mathbb{R}^d$．したがって，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} F_h(x,y)\,dy = 0$ となるので，$\lim_{h\to 0}(G_\beta * f)(x+h) - (G_\beta * f)(x) = 0$．ゆえに題意が成立する． ∎

命題 4.6 と (4.23) によって，各 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$e^{-\beta H_0} f$ を $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数と同一視することができる．以後，この同一視を用いる．したがって，(4.12) はすべての $x \in \mathbb{R}^d$ で成立する式になる．

次の命題に述べる事実も基本的である：

【命題 4.7】 $\mathbb{R}^d$ 上の任意の有界な連続関数 f に対して

$$\lim_{\beta\to 0}(G_\beta * f)(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.25}$$

証明 変数変換 $z = \sqrt{m/2\beta}(x-y)$ により

$$(G_\beta * f)(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} f\left(x - \sqrt{2\beta/m}\, z\right) dz.$$

仮定により，$e^{-z^2}|f(x-\sqrt{2\beta/m}\,z)| \le e^{-z^2}\|f\|_\infty$ である．また，$\lim_{\beta\to 0} e^{-z^2} f\left(x - \sqrt{2\beta/m}\,z\right) = e^{-z^2} f(x)$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{\beta\to 0}(G_\beta * f)(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} f(x)\,dz = f(x).$$

∎

命題 4.7 は，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して定まる y の関数 $G_\beta(x-y)$ が，$\beta \to 0$ のとき，超関数の意味で d 次元のデルタ超関数 $\delta(x-y)$ に収束することを示している．この事実に基づいて

$$G_0 := \delta \ (d\text{ 次元のデルタ超関数}), \quad P_0(x,y) := G_0(x-y) = \delta(x-y) \tag{4.26}$$

---

[9] $\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{m\varepsilon_0|x-y|/\beta} G_\beta(x-y)\right)^2 dy < \infty$ に注意．

と定義する．

この節を終えるにあたって，熱核 $P_\beta(x,y)$ の基本的性質をまとめておく．

【命題 4.8】 $t,s>0$ とする．

(i) $P_t(x,y)>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d}P_t(x,y)dy=1,\ \forall x\in\mathbb{R}^d$.

(ii) [**鎖則** (チェーンルール chain rule)]

$$\int_{\mathbb{R}^d}P_t(x,y)P_s(y,z)\,dy=P_{t+s}(x,z),\quad \forall x,z\in\mathbb{R}^d.$$

証明　直接計算. ∎

✱ 注意 4.9　鎖則 (ii) は半群特性 $e^{-tH_0}e^{-sH_0}=e^{-(t+s)H_0}$ と呼応している．これを用いて証明してもよい．

4.3　多重積に対する積分表示

$\mathbb{R}^d$ 上の本質的に有界なボレル可測関数の全体を $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ で表し，$f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の本質的上限ノルムを $\|f\|_\infty$ と記す．(4.3) の右辺を見ると，より一般的には，$f_1,\cdots,f_{n-1}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし

$$e^{-s_1H_0}f_1\,e^{-s_2H_0}f_2\,e^{-s_3H_0}\cdots f_{n-1}\,e^{-s_nH_0}f_n\quad (s_j\geq 0,\ j=1,\cdots,n)$$

という形のベクトルを考えるのが自然である．各 $f_j\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,n-1)$ は，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛算作用素として有界であるので，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素

$$K_{s_1,\cdots,s_n}(f_1,\cdots,f_{n-1}):=e^{-s_1H_0}f_1\,e^{-s_2H_0}f_2\,e^{-s_3H_0}\cdots f_{n-1}\,e^{-s_nH_0}\qquad (s_j\geq 0,\ j=1,\cdots,n)\tag{4.27}$$

は有界である．さらに

$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|,\quad A,B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})\tag{4.28}$$

と「掛算作用素 f_j の作用素ノルムは $\|f\|_\infty$ 以下である」という事実および (4.8) を使えば

$$\|K_{s_1,\cdots,s_n}(f_1,\cdots,f_{n-1})\|\leq\prod_{j=1}^{n-1}\|f_j\|_\infty\tag{4.29}$$

が得られる．

【定理 4.10】 $f_1,\cdots,f_{n-1}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $s_j>0$ $(j=1,\cdots,n)$, $x\in\mathbb{R}^d$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&(e^{-s_1H_0}f_1\,e^{-s_2H_0}f_2\cdots f_{n-1}\,e^{-s_nH_0}f_n)(x)\\
&\quad=\int_{(\mathbb{R}^d)^n}\left(\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\right)P_{s_1}(x,x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)\,dx_1\cdots dx_n.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

特に

$$
\begin{aligned}
&(e^{-s_1H_0}f_1e^{-s_2H_0}f_2\cdots f_{n-1}e^{-s_nH_0}f_n)(0)\\
&\quad=\int_{(\mathbb{R}^d)^n}\left(\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\right)P_{s_1}(0,x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)\,dx_1\cdots dx_n.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

証明

$$f:=e^{-s_1H_0}f_1\,e^{-s_2H_0}f_2\cdots f_{n-1}\,e^{-s_nH_0}f_n$$

とおけば

$$f=K_{s_1,\cdots,s_n}(f_1,\cdots,f_{n-1})f_n=e^{-s_1H_0}f_1K_{s_2,\cdots,s_n}(f_2,\cdots,f_{n-1})f_n$$

と書けるので

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\int_{\mathbb{R}^d}P_{s_1}(x,x_1)f_1(x_1)(K_{s_2,\cdots,s_n}(f_2,\cdots,f_{n-1})f_n)(x_1)\,dx_1\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}P_{s_1}(x,x_1)f_1(x_1)\left(\int_{\mathbb{R}^d}P_{s_2}(x_1,x_2)f_2(x_2)\right.\\
&\qquad\left.\times(K_{s_3,\cdots,s_n}(f_3,\cdots,f_{n-1})f_n)(x_2)\,dx_2\right)dx_1\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}P_{s_1}(x,x_1)f_1(x_1)\left(\int_{\mathbb{R}^d}P_{s_2}(x_1,x_2)f_2(x_2)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\cdots\left(\int_{\mathbb{R}^d}f_{n-1}(x_{n-1})P_{s_n}(x_{n-1},x_n)f_n(x_n)\,dx_n\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

ここで

$$|P_{s_1}(x,x_1)f_1(x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)f_2(x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)f_n(x_n)|$$

$$\le P_{s_1}(x,x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)|f_n(x_n)|\left(\prod_{j=1}^{n-1}\|f_j\|_\infty\right)$$

であり，命題 4.8 により

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} dx_1\cdots dx_n P_{s_1}(x,x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)|f_n(x_n)|$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} P_{s_1+\cdots+s_{n-1}+s_n}(x,x_n)|f_n(x_n)|\,dx_n < \infty.$$

したがって，フビニの定理が応用できるので，(4.32) の最右辺における積分順序は任意でよい．ゆえに (4.30) が出る． ∎

4.4 経路積分表示

(4.30) の右辺の形に注目し，各ボレル集合 $B \in \mathfrak{B}^{dn}$ と $(s_1,\cdots,s_n) \in (0,\infty)^n$ および $x_0 \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\rho_{s_1,\cdots,s_n;x_0}(B) := \int_B P_{s_1}(x_0,x_1)P_{s_2}(x_1,x_2)\cdots P_{s_n}(x_{n-1},x_n)\,dx_1\cdots dx_n \tag{4.33}$$

とすれば，$\rho_{s_1,\cdots,s_n;x_0}$ は $((\mathbb{R}^d)^n, \mathfrak{B}^{dn})$ 上の確率測度であることがわかる．この定義は，もともと $s_j > 0$ $(j=1,\cdots,n)$ の場合に関するものであるが，次のようにして，$s_1,\cdots,s_n$ の中に 0 のものがある場合へと拡張しておく．(4.33) の右辺の被積分関数が，$x_1 - x_0$, $x_j - x_{j-1}$ $(j=2,\cdots,n)$ の関数であることに注目し，積分変数の変数変換を考える．すなわち，写像 $T:(\mathbb{R}^d)^n \to (\mathbb{R}^d)^n$ を

$$T(x)_1 := x_1 - x_0, \quad T(x)_j := x_j - x_{j-1},$$
$$j=2,\cdots,n,\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in(\mathbb{R}^d)^n \tag{4.34}$$

によって定義する．このとき，T は全単射であり，(4.33) は

$$\rho_{s_1,\cdots,s_n;x_0}(B) := \int_{T(B)} G_{s_1}(y_1)G_{s_2}(y_2)\cdots G_{s_n}(y_n)\,dy_1\cdots dy_n \tag{4.35}$$

と書き換えられる．そこで，各 $s \ge 0$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 g_s を

$$g_0(A) := \chi_A(0),\ A\in\mathfrak{B}^d\,;\ g_s(A) := \int_A G_s(y)\,dy, \quad s>0,\ A\in\mathfrak{B}^d \tag{4.36}$$

によって定義する[10]．$s_j > 0\ (j = 1, \cdots, n)$ ならば，(4.35) の右辺は，$g_{s_1}, \cdots, g_{s_n}$ の直積測度 $g_{s_1} \otimes \cdots \otimes g_{s_n}$ の $T(B)$ における値である．そこで，$s_j \geq 0\ (j = 1, \cdots, n)$ に対しては

$$\rho_{s_1, \cdots, s_n; x_0}(B) := (g_{s_1} \otimes \cdots \otimes g_{s_n})(T(B)), \quad B \in \mathfrak{B}^{dn} \tag{4.37}$$

と定義する．

こうして，$[0, \infty)^n$ を添え字集合とする確率測度の族 $\{\rho_{s_1, \cdots, s_n; x_0} \mid n \in \mathbb{N}, s_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n\}$ が得られる．もし，この族が整合的ならば，コルモゴロフの定理（付録 D の定理 D.7）を $\mathcal{I} = [0, \infty)$ の場合に応用することにより，$\dot{\mathbb{R}}^d = (\dot{\mathbb{R}})^d$（$\dot{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ の 1 点コンパクト化）の無限直積空間

$$\Omega := (\dot{\mathbb{R}}^d)^{[0, \infty)} \tag{4.38}$$

上のボレル確率測度（Ω のボレル集合族上の確率測度）の存在が導かれ，(4.30) の右辺は，この確率測度による積分で表されるであろう．だが，$\{\rho_{s_1, \cdots, s_n; x_0} \mid n \in \mathbb{N}, s_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n\}$ は整合的ではない．実際，置換対称性が成立しないことは，最も簡単な $n = 2$ の場合を考えることにより，容易に見てとれる．この検証からわかるように，置換対称性が成立しない理由は，確率測度の族を指定する添え字 $s_j\ (j = 1, \cdots, n)$ を任意の非負実数としていることによる．そこで，添え字集合を適切に制限することにより，確率測度の族 $\{\rho_{s_1, \cdots, s_n; x_0} \mid n \in \mathbb{N},\ s_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n\}$ から整合的な確率測度の族を構成することを考える．結論からいえば，これは実際に可能であり，次のように進めばよい．

非負の実数の n 個の組 $(t_1, \cdots, t_n) \in [0, \infty)^n$ に対して，その成分を小さい順に並べることができる．すなわち，ある置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$（$n$ 次の対称群）があって

$$0 \leq t_{\sigma(1)} \leq t_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq t_{\sigma(n)} \tag{4.39}$$

が成り立つ[11]．この事実に基づいて，$(\mathbb{R}^d)^n$ 上の確率測度 $\mu_{t_1, \cdots, t_n; x_0}$ を

$$\mu_{t_1, \cdots, t_n; x_0}(B) := \rho_{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)} - t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)} - t_{\sigma(n-1)}; x_0}(B_\sigma), \quad B \in \mathfrak{B}^{dn} \tag{4.40}$$

[10] $\chi_A(0)$ は形式的に $\int_A \delta(y)\,dy = \int_A G_0(y)\,dy$ と書けることに注意．

[11] $t_1, \cdots, t_n$ の中に同じものがある場合には，σ は一意的でないが，(4.39) を満たす σ を 1 つ選ぶ．

によって定義する．ただし

$$B_\sigma := \{(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in B\} \tag{4.41}$$

である[12]．このとき，確率測度の族 $\{\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0} \mid n \in \mathbb{N},\ t_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n\}$ が整合的であることを確かめるのは難しくない（整合性の条件の一つ──付録 D.2 の条件 (K.2)──が満たされることを示すのに命題 4.8 が使われる）．したがって，コルモゴロフの定理（定理 D.7）により，Ω 上のボレル確率測度 P_{x_0} と確率ベクトルの族 $\{b(t)\}_{t\geq 0}$ が存在して（$b(t) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ の $\omega \in \Omega$ における値を $b(t)(\omega) \in \mathbb{R}^d$ と表す），各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $(t_1, \cdots, t_n) \in [0, \infty)^n$ および任意のボレル集合 $B \in \mathfrak{B}^{dn}$ に対して

$$P_{x_0}(\{\omega \in \Omega \mid (b(t_1)(\omega), \cdots, b(t_n)(\omega)) \in B\}) = \mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0}(B) \tag{4.42}$$

が成り立つ．確率ベクトル $b(t)$ の具体形の1つは次で与えられる：$\omega \in \Omega$ を $\omega = \{\omega(t) = (\omega_1(t), \cdots, \omega_d(t))\}_{t\geq 0}$ と表し（各 $t \geq 0$ ごとに，対応：$\omega \mapsto \omega(t) \in \dot{\mathbb{R}}^d$ を Ω 上の $\dot{\mathbb{R}}^d$ 値関数とみる）

$$b(t)(\omega) := (b_1(t)(\omega), \cdots, b_d(t)(\omega)), \tag{4.43}$$

$$b_j(t)(\omega) := \begin{cases} 0 & ;\ \omega_j(t) = \infty \text{ のとき} \\ \omega_j(t) & ;\ \omega_j(t) \neq \infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.44}$$

とする．系 D.8 の応用により，各 $n \in \mathbb{N}$ と任意の $t_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$, $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ および $(\mathbb{R}^d)^n$ 上の任意の $\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0}$ 可積分関数 f に対して

$$\int_\Omega f(b(t_1), \cdots, b(t_n))\, dP_{x_0} = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1, \cdots, x_n)\, d\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0} \tag{4.45}$$

が成り立つ．

確率ベクトルの族 $\{b(t)\}_{t\geq 0}$ は $[0, \infty)$ を添え字集合とする d 次元確率過程である．この確率過程を **d 次元ブラウン運動**または**ウィーナー過程** (Wiener process) といい，P_x を**ウィーナー測度**と呼ぶ．

前段の事実と定理 4.10 により，次の定理が得られる：

---

[12] (4.40) の右辺の形式的・象徴的表示は

$$\int_B P_{t_{\sigma(1)}}(x_0, x_{\sigma(1)}) P_{t_{\sigma(2)}-t_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \cdots P_{t_{\sigma(n)}-t_{\sigma(n-1)}}(x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)})\, dx_1 \cdots dx_n$$

である．ただし，$0 < t_{\sigma(1)} < \cdots < t_{\sigma(n)}$ のときは，そのまま意味をもつ．

【定理 4.11】 $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1 H_0} f_1\, e^{-(t_2-t_1)H_0} f_2 \cdots f_{n-1}\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_0} f_n\right)(x_0)\\&= \int_\Omega \left(\prod_{j=1}^n f_j(b(t_j))\right) dP_{x_0}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

特に

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1 H_0} f_1\, e^{-(t_2-t_1)H_0} f_2 \cdots f_{n-1}\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_0} f_n\right)(0)\\&= \int_\Omega \left(\prod_{j=1}^n f_j(b(t_j))\right) dP_0\end{aligned} \tag{4.47}$$

証明 $f(x_1, \cdots, x_n) := \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$ とおけば，

$$\begin{aligned}&\int_{(\mathbb{R}^d)^n} |f(x_1, \cdots, x_n)|\, d\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0}\\&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \left(\prod_{j=1}^n |f_j(x_j)|\right) P_{t_1}(x_0, x_1) P_{t_2-t_1}(x_1, x_2)\\&\quad \times \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\\&\le \prod_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x_n)| P_{t_n}(x_0, x_n)\, dx_n\\&\le \prod_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x_n)|^2\, dx_n\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_{t_n}(x_0, x_n)^2\, dx_n\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

したがって，f は $\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0}$ 可積分である．(4.30) の右辺で $s_1 = t_1$, $s_j = t_j - t_{j-1}$, $j \ge 2$ としたものは

$$\begin{aligned}&\int_{(\mathbb{R}^d)^n} \left(\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\right) P_{t_1}(x_0, x_1) P_{t_2-t_1}(x_1, x_2)\\&\quad \times \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\\&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1, \cdots, x_n)\, d\mu_{t_1,\cdots,t_n;x_0}.\end{aligned}$$

と書き替えられる．これと (4.45) により，(4.46) が得られる． ∎

各 $\omega \in \Omega$ は，各 $t \in [0,\infty)$ に対して，$\omega(t) \in \dot{\mathbb{R}}^d$ を対応させる写像（$\dot{\mathbb{R}}^d$ 値関数），すなわち，$\dot{\mathbb{R}}^d$ における経路 (path) とみることができる（$\omega(t)$ において，ω を固定し，t を変数と見る）．この観点からは，Ω は $[0,\infty)$ をパラメータ空間とする $\dot{\mathbb{R}}^d$ 内の経路の全体の集合，すなわち，**経路空間** (path space) である．したがって，この場合，測度 P_{x_0} は経路空間上の測度と見ることができる．この意味において，(4.46) や (4.47) の型の表示を**経路積分表示** (path integral representation) と呼ぶ．経路空間は関数空間の 1 つであり，被積分関数 $\prod_{j=1}^n f_j(b(t_j))$ は経路空間から $\mathbb{C}$ への写像，すなわち，1 つの汎関数であるので，経路積分表示を**汎関数積分表示** (functional integral representation) ともいう．

以下，$\{b(t)\}_{t\geq 0}$ によって生成される最小の σ 加法族 (i.e. すべての $b(t)$, $t \geq 0$ が可測となる最小の σ 加法族）を $\mathfrak{B}_b$ とし，特に断らないかぎり，P_{x_0} は可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B}_b)$ 上の確率測度と見る．

4.5　ポテンシャルがある場合

次に，(4.46), (4.47) の左辺にある熱作用素 e^{-tH_0} $(t = t_1, t_2-t_1, \cdots, t_n-t_{n-1})$ を相互作用の入ったハミルトニアン $\overline{H}_V$ が生成する熱作用素 $e^{-t\overline{H}_V}$ で置き換えて得られる式の汎関数積分表示を求めることを考える．まず，簡単のため，$n=1$ の場合，すなわち，$e^{-\beta\overline{H}_V}f$ $(f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d))$ の場合を考察する．そのために定理 4.1 を用いる．V は下に有界であるとし

$$V_0 := \mathrm{ess.inf}_{x\in\mathbb{R}^d} V(x) \quad (V \text{ の本質的下限}) \tag{4.48}$$

とすれば，すべての $t \geq 0$ に対して

$$e^{-tV} \leq e^{-tV_0}$$

が成り立つから，関数 e^{-tV} は有界である．したがって，(4.46) を応用することにより[13]，すべての $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left(\left(e^{-\beta H_0/n}e^{-\beta V/n}\right)^n f\right)(x) = \int_\Omega e^{-W_n(\omega)} f(b(\beta))\, dP_x, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{4.49}$$

[13] $t_j = j\beta/n$ $(j=1,\cdots,n)$, $f_j = e^{-\beta V/n}$ $(j=1,\cdots,n-1)$, $f_n = e^{-\beta V/n}f$ として応用すればよい．

が成り立つ．ただし

$$W_n(\omega) := \frac{\beta}{n}\sum_{j=1}^{n} V\left(b\left(\frac{j\beta}{n}\right)(\omega)\right), \quad P_x\text{-a.e.}\omega. \tag{4.50}$$

他方，定理 4.1 および L^2 収束と a.e. 収束に関する基本定理により，自然数列の部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ で $n_k < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ かつ $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ を満たすものが存在し

$$\left(e^{-\beta \overline{H}_V} f\right)(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\left(e^{-\beta H_0/n_k} e^{-\beta V/n_k}\right)^{n_k} f\right)(x), \quad \text{a.e.}x \in \mathbb{R}^d \tag{4.51}$$

が成立する．これと (4.49) により

$$\left(e^{-\beta \overline{H}_V} f\right)(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} e^{-W_{n_k}(\omega)} f(b(\beta))\, dP_x, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{4.52}$$

が導かれる．$V \geq V_0$ により

$$W_n(\omega) \geq \beta V_0.$$

したがって

$$\left|e^{-W_n(\omega)} f(b(\beta)(\omega))\right| \leq e^{-\beta V_0} |f(b(\beta)(\omega))|.$$

右辺は P_x について可積分な関数である[14]．したがって，もし，P_x-a.e.ω に対して

$$W(\omega) := \lim_{k\to\infty} W_{n_k}(\omega) \tag{4.53}$$

が存在すれば，ルベーグの優収束定理により

$$\left(e^{-\beta \overline{H}_V} f\right)(x) = \int_{\Omega} e^{-W(\omega)} f(b(\beta))\, dP_x, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{4.54}$$

が得られる．こうして，$e^{-\beta \overline{H}_V} f$ に対する汎関数積分表示を確立する問題は，$W_n(\omega)$ の $n \to \infty$ における極限 $\lim_{n\to\infty} W_n(\omega)$ が存在するか否かという問題に帰着される．この問題を解くための手がかりは，W_n の定義式 (4.50) に注目することである．すると，それは，ω を任意に固定するごとに定まる t の関数：

[14] $|f| \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ であるから，(4.46) で，$n = 1$, $t_1 = \beta$, $f_1 = f$ の場合を考えると，$\int_\Omega |f(b(\beta)(\omega))|\, dP_x = (e^{-\beta H_0}|f|)(x) < \infty$ となる．

$t \mapsto V(b(t)(\omega))$ の区間 $[0, \beta]$ におけるリーマン和になっていることがわかる．したがって，もし，この関数が t について連続ならば

$$W(\omega) = \lim_{n\to\infty} W_n(\omega) = \int_0^\beta V(b(t)(\omega))\,dt \quad \text{（リーマン積分）} \tag{4.55}$$

が成立する．したがって，この場合，(4.54) より

$$(e^{-\beta\overline{H}_V} f)(x) = \int_\Omega e^{-\int_0^\beta V(b(t)(\omega))dt} f(b(\beta))\,dP_x, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{4.56}$$

が成立することになる．

容易にわかるように，t の関数 $V(b(t)(\omega))$ が連続であるための十分条件の 1 つは，「$b(t)(\omega)$ が t について連続かつ V が連続」である．したがって，さしあたり，ポテンシャル V は連続関数のクラスに限定するとすれば，$b(t)(\omega)$ の連続性について調べる必要がある．そこで，節を改めて，この問題を検討する．

4.6　ブラウン運動の性質

この節では，前節の最後に言及した問題を解決することも含めて，ブラウン運動のいくつかの基本的な性質を調べる．以下，記号上の簡潔さを期して，測度 P_x による期待値を E_x で表す：(Ω, P_x) 上の可積分関数 f に対して

$$\mathrm{E}_x[f] := \int_\Omega f(\omega)\,dP_x(\omega). \tag{4.57}$$

確率ベクトル $b(t)$ の特性関数を $C_{b(t)}(k)$ $(k \in \mathbb{R}^d)$ とする：

$$C_{b(t)}(k) := \mathrm{E}_x[e^{ikb(t)}] \tag{4.58}$$

【命題 4.12】　すべての $t \geq 0$ に対して

$$C_{b(t)}(k) = e^{(-tk^2/2m)+ikx}, \quad k \in \mathbb{R}^d. \tag{4.59}$$

証明　$t > 0$ の場合

$$C_{b(t)}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iky} P_t(x,y)\,dy = \prod_{j=1}^d I_j(k_j)$$

ただし, $I_j(k_j) := \sqrt{m/2\pi t}\int_{\mathbb{R}} e^{ik_jy_j}\, e^{-m(y_j-x_j)^2/2t}\, dy_j$. 公式 (1.73) を用いると

$$I_j(k_j) = e^{-tk_j^2/2m+ik_jx_j}.$$

したがって, (4.59) が成立する. $t=0$ の場合は $C_{b(0)}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iky}\, d\mu_{0;x}(y)$ である. $\mu_{0;x}$ の台は $\{x\}$ であり, $\mu_{0;x}(\{x\}) = 1$ であるから, 右辺の積分は e^{ikx} に等しい. したがって, (4.59) で $t=0$ とした式が成立する. ∎

式 (4.59) は, $C_{b(t)}$ が $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数であることを語る. したがって, 定理 1.36-(ii) によって, すべての $\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ $(j = 1, \cdots, d)$ に対して

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^d |b_j(t)(\omega)|^{\alpha_j}\, dP_x < \infty \tag{4.60}$$

であり

$$\mathrm{E}_x\left[\prod_{j=1}^d b_j(t)^{\alpha_j}\right] = i^{-\sum_{j=1}^d \alpha_j} \left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} C_{b(t)}(k)}{\partial k_1^{\alpha_1}\cdots\partial k_d^{\alpha_d}}\right|_{k=0} \tag{4.61}$$

が成り立つ. この式と (4.59) から, 特に, 次の結果が得られる:

(i) $\alpha_j = 1$, $\alpha_\ell = 0$, $\ell \neq j$ の場合を考えることにより

$$\mathrm{E}_x[b_j(t)] = x_j. \tag{4.62}$$

(ii) $\alpha_j = \alpha_\ell = 1$, $\alpha_p = 0$, $p \neq j, \ell$ の場合を考えることにより

$$\mathrm{E}_x[b_j(t)b_\ell(t)] = \frac{t}{m}\delta_{j\ell} + x_jx_\ell, \quad j, \ell = 1, \cdots, d. \tag{4.63}$$

$\mathrm{E}_x[f]$ の f に関する線形性と (4.62), (4.63) より

$$\mathrm{E}_x[(b_j(t) - x_j)(b_\ell(t) - x_\ell)] = \frac{t}{m}\delta_{j\ell} \tag{4.64}$$

が得られる. したがって, 特に

$$\mathrm{E}_x[(b_j(0) - x_j)^2] = 0, \quad j = 1, \cdots, d.$$

これは, $b_j(0)(\omega) = x_j$, P_x-a.e.ω $(j = 1, \cdots, d)$ を意味する. したがって

$$b(0)(\omega) = x, \quad P_x\text{-a.e.}\omega. \tag{4.65}$$

この性質のゆえに, $\{b(t)\}_{t\geq 0}$ は, より精密には, **点 x から出発する d 次元ブラウン運動**と呼ばれる. この特性関数がどのようになるかを見よう:

【命題 4.13】 すべての $N \in \mathbb{N}$ と $k_n \in \mathbb{R}^d$, $t_n > 0$ $(n = 1, \cdots, N)$ 対して

$$\mathrm{E}_x\left[e^{i\sum_{n=1}^N k_n b(t_n)}\right] = e^{ix(\sum_{n=1}^N k_n)} e^{-\frac{1}{2m}\sum_{n,n'=1}^N k_n k_{n'} \min\{t_n, t_{n'}\}} \tag{4.66}$$

が成り立つ[15].

証明 対称性により，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ の場合を示せば十分である．このとき，(4.45) によって

$$\begin{aligned} I &:= \mathrm{E}_x\left[e^{i\sum_{n=1}^N k_n b(t_n)}\right] \\ &= \int_{(\mathbb{R}^d)^N} e^{i\sum_{n=1}^N k_n x_n} P_{t_1}(x, x_1) P_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \\ &\quad \times \cdots P_{t_N - t_{N-1}}(x_{N-1}, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N. \end{aligned}$$

変数変換

$$y_1 = x_1 - x, \quad y_n = x_n - x_{n-1}, \; n = 2, \cdots, N$$

によって

$$\begin{aligned} I = {} & e^{ix(\sum_{n=1}^N k_n)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{iy_1(k_1 + \cdots + k_N)} G_{t_1}(y_1)\, dy_1\right) \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{iy_2(k_2 + \cdots + k_N)} G_{t_2 - t_1}(y_2)\, dy_2\right) \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{iy_3(k_3 + \cdots + k_N)} G_{t_3 - t_2}(y_3)\, dy_3\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{iy_N k_N} G_{t_N - t_{N-1}}(y_N)\, dy_N\right). \end{aligned}$$

そこで，容易に証明される積分公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{iky} G_s(y)\, dy = e^{-sk^2/2m}, \quad s > 0, \; k \in \mathbb{R}^d \tag{4.67}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} I &= e^{ix(\sum_{n=1}^N k_n)}\, e^{-t_1(k_1 + \cdots + k_N)^2/2m}\, e^{-(t_2 - t_1)(k_2 + \cdots + k_N)^2/2m} \\ &\quad \times e^{-(t_3 - t_2)(k_3 + \cdots + k_N)^2/2m} \cdots e^{-(t_N - t_{N-1})k_N^2/2m} \\ &= e^{ix(\sum_{n=1}^N k_n)}\, e^{-\sum_{n=1}^N k_n^2 t_n/2m}\, e^{-\sum_{n<n'}^N k_n k_{n'} t_n/m} \\ &= e^{ix(\sum_{n=1}^N k_n)}\, e^{-\sum_{n,n'=1}^N k_n k_{n'} \min\{t_n, t_{n'}\}/2m} \end{aligned}$$

---

[15] 実数 a, b について，$a \leq b$ ならば $\min\{a, b\} := a$；$a > b$ ならば $\min\{a, b\} := b$.

となり，証明が完結する． ∎

式 (4.66) は

$$\mathrm{E}_x\left[e^{i\sum_{n=1}^N k_n(b(t_n)-x)}\right] = e^{-\frac{1}{2m}\sum_{n,n'=1}^N k_n k_{n'}\min\{t_n,t_{n'}\}} \tag{4.68}$$

と書き直せる．これは $\{b(t)-x\}_{t>0}$ がガウス型確率ベクトルの族でその共分散が

$$\mathrm{E}_x[(b_j(t)-x_j)(b_\ell(s)-x_\ell)] = \frac{\delta_{j\ell}}{m}\min\{t,s\}, \quad t,s>0,\ j,\ell=1,\cdots,d \tag{4.69}$$

によって与えられることを意味する．したがって，この式と (4.62) により，点 x から出発する d 次元ブラウン運動は完全に特徴づけられることになる．

次の重要な事実が成立する：

【命題 4.14】 各 $j=1,\cdots,d$ と任意の $\xi\in\mathbb{R}$，$h>0,\ t\geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}_x[e^{i\xi(b_j(t+h)-b_j(t))}] = e^{-h\xi^2/2m}. \tag{4.70}$$

特に，$b_j(t+h)-b_j(t)$ は平均が 0，分散が h/m のガウス型確率変数である．

証明 $X:=b_j(t+h)-b_j(t)$ の特性関数 $C_X(\xi):=\mathrm{E}_x[e^{i\xi X}]$ $(\xi\in\mathbb{R})$ は

$$C_X(\xi)=\mathrm{E}_x[e^{i(-\xi)b_j(t)+i\xi b_j(t+h)}]$$

であるから，(4.66) で $N=2$ の場合を応用することにより (4.70) が成立することがわかる． ∎

【定理 4.15】 $\{b(t)\}_{t\geq 0}$ を点 x から出発する d 次元ブラウン運動とし，$0<\alpha<1/2$ とする．このとき，$b(t)$ は同一の確率空間上で指数 α のヘルダー連続版（2.7 節の最後の部分を参照）をもつ．

証明 $d=1$ の場合を示せば十分である．$h>0$ とする．このとき，命題 4.14 と命題 1.13 によって

$$\mathrm{E}_x\left[|b(t+h)-b(t)|^p\right] = c_p\frac{h^{p/2}}{m^{p/2}} \quad (c_p\text{ は定数}). \tag{4.71}$$

任意の $0<\alpha<1/2$ に対して，$p>2/(1-2\alpha)$ とすれば，$\alpha<(p/2-1)/p$ となる．したがって，系 2.23 によって，$b(t)$ は（同じ確率空間上で）指数 α のヘルダー連続版をもつ．したがって，題意が成立する． ∎

✱ 注意 4.16　(4.71) で $p = 1$ の場合を考えると

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{E}_x \left[\left| \frac{b(t+h) - b(t)}{h} \right| \right] = +\infty$$

であることがわかる．これは $b(t)(\omega)$ が P_x-a.e.ω に対して，t に関して微分可能でないことを示唆する．実際，証明は割愛するが，P_x-a.e.ω に対して，t の関数 $b(t)(\omega)$ はいたるところ微分不可能なのである[16].

定理 4.15 に基づいて，以後，ブラウン運動として，指数 $\alpha \in (0, 1/2)$ のヘルダー連続版を用いる．特に，(4.65) と合わせると，確率測度 P_x は，始点が x である $\mathbb{R}^d$ 内の曲線（パラメータ空間は $[0, \infty)$）の全体

$$\Omega_x := \{\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d \mid \omega(0) = x, \omega \text{ は連続} \} \tag{4.72}$$

上で定義されたものとしてよい．

4.7　ブラウン運動の独立性

【定理 4.17】　$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ とし，$\delta b_j = b(t_{j+1}) - b(t_j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ とおく．このとき，$\delta b_1, \cdots, \delta b_n$ は独立である．

証明　定理 1.27 を応用する．$\widetilde{b}(t) := b(t) - x$ とおけば，$\delta b_j = \widetilde{b}(t_{j+1}) - \widetilde{b}(t_j)$ であるから

$$e^{i \sum_{j=1}^n k_j \delta b_j} = e^{i(-k_1)\widetilde{b}(t_1) + \sum_{j=2}^n (k_{j-1} - k_j)\widetilde{b}(t_j) + k_n \widetilde{b}(t_{n+1})}$$

したがって，(4.66) によって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_x \left[e^{i \sum_{j=1}^n k_j \delta b_j} \right] \\
&= \exp\Bigg[-\frac{1}{2m} \Bigg(k_1^2 t_1 + \sum_{j=2}^n (k_{j-1} - k_j)^2 t_j + k_n^2 t_{n+1} \\
&\qquad + 2\sum_{j=2}^n (-k_1)(k_{j-1} - k_j) t_1 + 2(-k_1) k_n t_1 \\
&\qquad + 2 \sum_{2 \le j < \ell \le n} (k_{j-1} - k_j)(k_{\ell-1} - k_\ell) t_j + 2 \sum_{2 \le j \le n} (k_{j-1} - k_j) k_n t_j \Bigg) \Bigg]
\end{aligned}$$

[16] 証明については，たとえば，飛田武幸，『ブラウン運動』(岩波書店，1975) の p.58〜59 や掛下伸一，『確率論』(サイエンス社，1973) の p.174〜176 を参照.

$$= \exp\left(-\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{n}(t_{j+1}-t_j)k_j^2\right)$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\exp\left(-\frac{1}{2m}(t_{j+1}-t_j)k_j^2\right)$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\mathrm{E}_x[e^{ik_j\delta b_j}] \quad (\because \text{命題 } 4.14).$$

ゆえに定理 1.27 によって題意が成立する. ■

【定理 4.18】 $0 \le s \le t_1 < t_2$ ならば $b(s)$ と $b(t_2) - b(t_1)$ は独立である.

証明 任意の $k, p \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_x\left[e^{ikb(s)+p(b(t_2)-b(t_1))}\right] &= e^{ikx}\mathrm{E}_x\left[e^{i(k\tilde{b}(s)+(-p)\tilde{b}(t_1)+p\tilde{b}(t_2))}\right] \\
&= e^{ikx}\exp\left[-\frac{1}{2m}(k^2s+p^2t_1+p^2t_2+2k(-p)s\right. \\
&\qquad \left.+2kps+2(-p)pt_1)\right] \quad (\because (4.66)) \\
&= e^{ikx}\,e^{-k^2s/2m}\,e^{-(t_2-t_1)p^2/2m} \\
&= \mathrm{E}_x\left[e^{ikb(s)}\right]\mathrm{E}_x\left[e^{ip(b(t_2)-b(t_1))}\right] \\
&\qquad (\because \text{命題 } 4.12 \text{ と命題 } 4.14).
\end{aligned}$$

ゆえに題意が成立する. ■

4.8 ファインマン–カッツの公式

以上の準備のもとで, シュレーディンガー半群 $e^{-\beta\overline{H}_V}$ $(\beta > 0)$ に対する経路積分表示を導くことができる.

前節の結果により, d 次元ウィーナー測度 P_x に関してほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して, $t \mapsto b(t)(\omega) = \omega(t)$ は連続である. したがって, V が $\mathbb{R}^d$ 上で連続ならば, $\int_0^\beta V(b(t)(\omega))\,dt$ はリーマン積分として定義され, $\mathfrak{B}_b$-可測である. 以下, 記号上の簡潔さのため, $\int_0^\beta V(b(t)(\omega))\,dt$ をしばしば $\int_0^\beta V(b(t))\,dt$ と記す.

【定理 4.19】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $f_1, \cdots, f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(e^{-t_1 \overline{H}_V} f_1 \, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n)(x) \\
&\quad = \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1)) \cdots f_n(b(t_n)) \, e^{-\int_0^{t_n} V(b(t))\,dt} \right], \quad \text{a.e.}x. \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

特に，任意の $\beta > 0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$
(e^{-\beta \overline{H}_V} f)(x) = \mathrm{E}_x\left[f(b(\beta)) \, e^{-\int_0^{\beta} V(b(t))\,dt} \right], \quad \text{a.e.}x. \qquad (4.74)
$$

証明　$s_1 = t_1$, $s_j = t_j - t_{j-1}$ $(j = 2, \cdots, n)$ とおく．定理 4.3 と加藤–トロッターの積公式（定理 4.1）により

$$
e^{-s_1 \overline{H}_V} f_1 \, e^{-s_2 \overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-s_n \overline{H}_V} f_n = \lim_{N_n \to \infty} \lim_{N_{n-1} \to \infty} \cdots \lim_{N_1 \to \infty} S_{N_1, \cdots, N_n}
$$

と書ける．ただし

$$
\begin{aligned}
S_{N_1,\cdots,N_n} := &\left(e^{-s_1 \overline{H}_0/N_1} \, e^{-s_1 V/N_1} \right)^{N_1} f_1 \left(e^{-s_2 \overline{H}_0/N_2} \, e^{-s_2 V/N_2} \right)^{N_2} \\
&\times f_2 \cdots f_{n-1} \left(e^{-s_n \overline{H}_0/N_n} \, e^{-s_n V/N_n} \right)^{N_n} f_n.
\end{aligned}
$$

この式の右辺は定理 4.11 を応用することにより

$$
\begin{aligned}
S_{N_1,\cdots,N_n}(x) = \mathrm{E}_x\Bigg[& e^{-\sum_{j=1}^{N_1} \frac{s_1}{N_1} V\left(b\left(\frac{js_1}{N_1}\right)\right)} f_1(b(t_1)) \, e^{-\sum_{j=1}^{N_2} \frac{s_2}{N_2} V\left(b\left(t_1 + \frac{js_2}{N_2}\right)\right)} \\
& \times f(b(t_2)) \cdots e^{-\sum_{j=1}^{N_n} \frac{s_n}{N_n} V\left(b\left(t_{n-1} + \frac{js_n}{N_n}\right)\right)} f_n(b(t_n)) \Bigg], \quad \text{a.e.}x
\end{aligned}
$$

と変形される．P_x-a.e.ω に対して

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N_k \to \infty} e^{-\sum_{j=1}^{N_k} s_k V(b(t_{k-1} + js_k)/N_k)/N_k} = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} V(b(s))\,ds}, \\
&\left| e^{-\sum_{j=1}^{N_k} s_k V(b(t_{k-1} + js_k)/N_k)/N_k} \right| \le e^{-V_0 s_k}
\end{aligned}
$$

であるから，ルベーグの優収束定理により

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N_n \to \infty} \lim_{N_{n-1} \to \infty} \cdots \lim_{N_1 \to \infty} S_{N_1,\cdots,N_n}(x) \\
&\quad = \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1)) \cdots f_n(b(t_n)) \, e^{-\int_0^{t_n} V(b(s))\,ds} \right]
\end{aligned}
$$

が得られる．ゆえに (4.73) が成立する． ∎

経路積分表示 (4.73) を**ファインマン** (Feynman)–**カッツ** (M. Kac) **の公式**と呼ぶ．

ファインマン–カッツの公式 (4.73) は，実は，V が必ずしも $C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ に属さない場合へと拡張することができる．もちろん，この場合，$\int_0^t V(b(s))\,ds$ をどのように定義するかがまず問題になる．V を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数としよう．このとき，各 $\omega \in \Omega_x$ に対して，$V(b(s)(\omega)) = V(\omega(s))$ は s のボレル可測関数である．したがって，もし，このボレル可測関数がルベーグ積分可能ならば，1 次元ルベーグ積分としての $\int_0^t V(b(s)(\omega))\,ds$ が定義される．そこで，$V(b(s)(\omega))$ の s に関する可積分性を検討する．

まず，$V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える．この場合，$|V(b(t))(\omega)| \le \|V\|_\infty$ であるから，$\int_0^t V(b(s)(\omega))\,ds$ は存在する．

関数 $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で次の性質をもつものをとる：(i) $\rho(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$；(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$；(iii) $\rho(x) = 0,\ |x| \ge 1$；(iv) $\rho(0) = 1$．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$ とおく．$R > 0$ に対して，$\mathbb{R}^d$ の原点を中心とする，半径 R の球を B_R とする：

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \le R\}. \tag{4.75}$$

$V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ であるから，軟化作用素の理論（付録 A.2 を参照）でよく知られているように，任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\ell} |(\rho_n * V)(x) - V(x)|^p\,dx = 0$$

が成り立つ（付録 A，定理 A.3-(v) を参照）．したがって，部分列 $\left\{n_k^{(\ell)}\right\}_k$ と零集合 $\mathcal{N}_\ell$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} (\rho_{n_k^{(\ell)}} * V)(x) = V(x), \quad \forall x \in B_\ell \setminus \mathcal{N}_\ell$$

となる．部分列の取り方を $\ell = 1, 2, 3, \cdots$ と順に進めることにより $\left\{n_k^{(\ell+1)}\right\}_k$ が $\left\{n_k^{(\ell)}\right\}_k$ の部分列となるようにとれる．そこで，$m_\ell := n_\ell^{(\ell)}$ とおけば

$$\lim_{\ell\to\infty} (\rho_{m_\ell} * V)(x) = V(x), \quad \forall x \in \bigcup_{n=1}^\infty (B_n \setminus \mathcal{N}_n)$$

が成立する．$\mathcal{N}_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$ とおけば，$\mathcal{N}_0$ はルベーグ測度 0 の集合であり

$$\lim_{\ell\to\infty} (\rho_{m_\ell} * V)(x) = V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}_0$$

が得られる ($\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ に注意)．軟化作用素の理論により，$\rho_n * V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから

$$V_\ell(x) := \rho(x/m_\ell)(\rho_{m_\ell} * V)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

とすれば，$V_\ell \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，上の事実と ρ に関する (iv) の性質を用いると

$$\lim_{\ell\to\infty} V_\ell(x) = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}_0$$

を示すことができる．

さて，$D_t := \{\omega \in \Omega_x \mid b(t)(\omega) \in \mathcal{N}_0\}$ とすれば（$dP^{b(t)}(y) := P_t(x,y)\,dy$ であるから）

$$P_x(D_t) = \int_{\mathcal{N}_0} P_t(x,y)\,dy = 0$$

となる．したがって，D_t は P_x に関して零集合である．ゆえに，フビニの定理によって，$\{(\omega,t) \mid b(t)(\omega) \in \mathcal{N}_0\}$ は測度 $dP_x \otimes dt$ に関して零集合である．すると再びフビニの定理により，P_x-a.e.ω に対して，$\{t \in \mathbb{R} \mid b(t)(\omega) \in \mathcal{N}_0\}$ はルベーグ測度 0 の集合である． したがって，P_x-a.e.ω に対して，$b(t)(\omega) \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}_0$ (a.e.t) であるから，

$$\lim_{\ell\to\infty} V_\ell(b(t)(\omega)) = V(b(t)(\omega)), \quad \text{a.e.}t$$

となる．さらに，$|V_\ell(b(t)(\omega))| \le \|\rho\|_\infty \|V\|_\infty$ であるから，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_0^t V_\ell(b(s)(\omega))\,ds = \int_0^t V(b(s)(\omega))\,ds, \quad P_x\text{-a.e.}\omega \tag{4.76}$$

が得られる．

ところで，$V_\ell \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ であるから，定理 4.19 によって，任意の $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $f_1, \cdots, f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1 \overline{H}_{V_\ell}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V_\ell}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V_\ell}} f_n\right)(x) \\ &\quad = \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1)) \cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V_\ell(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.\end{aligned} \tag{4.77}$$

が成り立つ．(4.76) とルベーグの優収束定理により，(4.77) の右辺は，$\ell \to \infty$ のとき，V_ℓ を V で置き換えた式に収束する．すなわち

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(e^{-t_1\overline{H}_{V_\ell}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V_\ell}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V_\ell}} f_n\right)(x) \\ = \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.$$

一方，任意の $f \in D(H_V) = D(H_0) \cap D(V) = D(H_0)$（∵ いまの場合，$D(V) = L^2(\mathbb{R}^d)$）に対して

$$\lim_{\ell\to\infty} H_{V_\ell} f = H_V f$$

を示すのは容易である．したがって，付録 C の定理 C.20 によって

$$\text{s-}\lim_{\ell\to\infty} e^{-t\overline{H}_{V_\ell}} = e^{-t\overline{H}_V}, \quad t > 0$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{\ell\to\infty} e^{-t_1\overline{H}_{V_\ell}} f_1 e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V_\ell}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V_\ell}} f_n \\ = e^{-t_1\overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n.$$

そこで適当な部分列 $\{\ell_j\}_j$ を選べば

$$\lim_{j\to\infty} \left[e^{-t_1\overline{H}_{V_{\ell_j}}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V_{\ell_j}}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V_{\ell_j}}} f_n\right](x) \\ = \left[e^{-t_1\overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right](x), \quad \text{a.e.}x$$

となる．以上から，$V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して (4.73) が証明されたことになる．

次に，V がさらに一般の関数クラスに属する場合を考察する．

関数 V の値 $V(x)$ は a.e.$x \in \mathbb{R}^d$ に対して有限であると仮定する．各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，関数 V_N を (i) $V(x) \geq -N$ ならば $V_N(x) := V(x)$；(ii) $V(x) < -N$ ならば $V_N(x) = 0$ と定義する．明らかに，$V_N \geq -N$ であるので，V_N は下に有界である．さらに，$\lim_{N\to\infty} V_N(x) = V(x)$ (a.e.x) が成り立つ．また，V が下に有界ならば，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ があって，$N \geq N_0$ ならば，$V(x) = V_N(x)$, a.e.x である．ゆえに，関数列 $\{V_N\}_{N=1}^\infty$ は，V を近似する，下に有界な関数列の 1 つである．関数 V_N のグラフ $y = V_N(x)$ は，$y = 0$ の部分を除いて，V のグラ

フのうち，$y < -N$ の下方部分をいわば“切り落とした”ものである．そこで，V_N を V の**下切断**と呼ぶ．この場合，N をその**切断パラメータ**という．

次の条件を考える：

(H') V は条件 (H) を満たす実数値ボレル可測関数で a.e.x に対して，$V(x)$ は有限であり，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して，H_{V_N} は本質的に自己共役である．

【定理 4.20】 V は条件 (H') を満たすとする．このとき，各 $t > 0$ と P_x-a.e.ω に対して，$\int_0^t V(b(s)(\omega))\,ds$ は存在し，(4.73) が成立する．

証明 任意の関数は，非負の関数の線形結合で表されるから，(4.73) は，$f_1, \cdots, f_n$ がすべて非負の場合に示せば十分である．

（第 1 段）V が下に有界な場合を考え，各 $M \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の $V^{(M)}$ を $V(x) < M$ ならば，$V^{(M)}(x) := V(x)$；$V(x) \geq M$ ならば $V^{(M)}(x) := 0$ と定義する．このとき，$V^{(M)}(x) \leq V(x)$, $\lim_{M\to\infty} V^{(M)}(x) = V(x)$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$. $V^{(M)} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから，上述の結果が使える．したがって

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1 \overline{H}_{V^{(M)}}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V^{(M)}}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V^{(M)}}} f_n\right)(x)\\ &\quad = \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1)) \cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V^{(M)}(b(t))\,dt}\right]\\ &\quad \geq \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1)) \cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.\end{aligned}$$

したがって，P_x-a.e.ω に対して，$\int_0^{t_n} V(b(t)(\omega))\,dt$ は存在する．任意の $f \in D(H_V) = D(H_0) \cap D(V)$ に対して

$$\lim_{M\to\infty} H_{V^{(M)}} f = H_V f.$$

したがって，上述の場合（$V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の場合）と同様に，$\text{s-}\lim_{M\to\infty} e^{-tH_{V^{(M)}}} = e^{-t\overline{H}_V}$, $t > 0$. 特に，部分列 $\{M_k\}_k$ が存在して

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} \left(e^{-t_1 \overline{H}_{V^{(M_k)}}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V^{(M_k)}}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V^{(M_k)}}} f_n\right)(x)\\ &\quad = \left(e^{-t_1 \overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right)(x), \quad \text{a.e.}x\end{aligned}$$

が得られる．ゆえに

$$\left(e^{-t_1 \overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right)(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V^{(M_k)}(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.$$

$\{V^{(M)}(x)\}_M$ は M について単調増大である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{t_n} V^{(M)}(b(t)(\omega))\,dt = \int_0^{t_n} V(b(t)(\omega))\,dt, \quad P_x\text{-a.e.}\omega.$$

また，$e^{-\int_0^{t_n} V^{(M)}(b(t))\,dt}$ は M について単調減少である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1\overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right)(x)\\ &= \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\lim_{k\to\infty}\int_0^{t_n} V^{(M_k)}(b(t))\,dt}\right]\\ &= \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V(b(t))\,dt}\right].\end{aligned}$$

ゆえに (4.73) が成り立つ．

（第 2 段）V が下に有界でない場合．この場合，各 $N\in\mathbb{N}$ に対して，関数 V_N を $V(x)\geq -N$ ならば，$V_N(x):=V(x)$；$V(x)<-N$ ならば $V_N(x):=0$ と定義する．このとき，$V_N(x)$ は N について単調減少であり，$V_N(x)\geq V(x)$, $\lim_{N\to\infty}V_N(x)=V(x)$ (a.e.x) が成り立つ．V_N は下に有界であるから，第 1 段の結果が使える．したがって

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1\overline{H}_{V_N}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_{V_N}} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_{V_N}} f_n\right)(x)\\ &= \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V_N(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.\end{aligned}$$

任意の $f\in D(H_V)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} H_{V_N} f = H_V f.$$

したがって，$\text{s-}\lim_{N\to\infty} e^{-t\overline{H}_{V_N}} = e^{-t\overline{H}_V}$, $t>0$．ゆえに，第 1 段と同様にして，部分列 $\{N_k\}_k$ があって

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1\overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right)(x)\\ &= \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n} V_{N_k}(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.\end{aligned}$$

$-\int_0^{t_n} V_N(b(t))\,dt$ は N について単調増大あるので，単調収束定理により

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t_1\overline{H}_V} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V} f_2 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n\right)(x)\\&= \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\, e^{-\lim_{k\to\infty}\int_0^{t_n} V_{N_k}(b(t))\,dt}\right], \quad \text{a.e.}x.\end{aligned}$$

したがって，$\lim_{k\to\infty}\int_0^{t_n} V_{N_k}(b(t)(\omega))\,dt < \infty$, P_x-a.e.ω．これとファトーの定理（補題）により $\int_0^{t_n} V(b(t)(\omega))\,dt < \infty$, P_x-a.e.ω．$t_n > 0$ は任意にとれるから，任意の $t > 0$ に対して，$\int_0^t V(b(s)(\omega))\,ds < \infty$, P_x-a.e.ω となる．すると，今度は，ルベーグの優収束定理を使うことにより，$\lim_{k\to\infty}\int_0^{t_n} V_{N_k}(b(t)(\omega))\,dt = \int_0^{t_n} V(b(t)(\omega))\,dt$, P_x-a.e.ω が得られる．よって，(4.73) が成立する．■

定理 4.20 は，次の例（物理的に基本的な例の 1 つ）に見られるように，特異性をもつポテンシャルの特定のクラスも包含する．ここでは示唆するしかないが，まさにこの一般的定理により，量子数理物理学の一定の範疇の数理解析において，厳密な汎関数積分法（経路積分法）の有用性が発揮されるのである．

■例 4.21　$d = 3$ とし

$$V(x) = V_{\mathrm{C}}(x) := \frac{\lambda}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

の場合を考える．ただし，$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は定数である．関数 V_{C} は**クーロン型ポテンシャル**と呼ばれる．明らかに，V_{C} は $\mathbb{R}^3$ 上の連続関数に拡張できない（$\because$ $\lim_{x\to 0}|V_{\mathrm{C}}(x)| = +\infty$）．だが，詳細は割愛するが，$D(H_{V_{\mathrm{C}}}) = D(H_0)$, $H_{V_{\mathrm{C}}}$ は自己共役であり（したがって，$\overline{H}_{V_{\mathrm{C}}} = H_{V_{\mathrm{C}}}$），下に有界であることが証明される[17]．$\{0\} \subset \mathbb{R}^3$ のルベーグ測度は 0 であるから，$V_{\mathrm{C}}(x)$ は a.e.$x \in \mathbb{R}^3$ に対して有限である．したがって，V_{C} は定理 4.20 の仮定を満たす（$\lambda < 0$ の場合，V_{C} は下に有界でないが，$(V_{\mathrm{C}})_N \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ であるから，$H_{(V_{\mathrm{C}})_N}$ は自己共役である）．ゆえに，(4.73) で $V = V_{\mathrm{C}}$ とした式が成立する．

$e > 0$ を基本電荷とするとき（i.e. $-e$ が電子の電荷），原点に固定された電荷 Ze ($Z \in \mathbb{N}$) の原子核のまわりを運動する電子系は**水素様原子**と呼ばれる．この系のハミルトニアンは適切な物理単位系において

$$H_{\mathrm{hyd}} := H_0 - \frac{Ze^2}{|x|}$$

で与えられる．ただし，この場合，H_0 に含まれるパラメータ m は電子の質量と解釈

[17] 拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006）の 2.3.5 項を参照．

する．これは，$\lambda = -Ze^2$ の場合の H_{V_C} であるので，H_{hyd} に対しても定理 4.20 が適用される．

■例 4.22 前例と同様，$d = 3$ とし，定数 $g > 0, m_0 > 0$ を任意にとり

$$V(x) = V_\mathrm{Y}(x) := -g\frac{e^{-m_0|x|}}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

の場合を考える．このポテンシャルは**湯川型ポテンシャル**と呼ばれる．原子核を構成する核子（陽子，中性子）どうしの引力（核力）は，第 1 次近似的には，この型のポテンシャルによって記述される．その場合，m_0 はパイ中間子の質量を表し，ハミルトニアン H_{V_Y} は，原点に固定された核子のまわりを 1 個の核子が運動する量子系のハミルトニアンを与える（この場合，H_0 に含まれる m は核子の質量を表す）．作用素 H_{V_Y} は

$$H_{V_\mathrm{Y}} = H_0 - \frac{g}{|x|} + g\frac{(1 - e^{-m_0|x|})}{|x|}$$

と変形できる．ここで，$g(1 - e^{-m_0|x|})/|x|$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の有界な自己共役作用素であることに注意しよう．他方，前例で述べたように，$H_0 - g/|x|$ は定義域を $D(H_0)$ とする下に有界な自己共役作用素である．したがって，H_{V_Y} は $D(H_0)$ を定義域とする下に有界な自己共役作用素であり，V_Y は定理 4.20 の仮定を満たす．ゆえに，$V = V_\mathrm{Y}$ に対しても (4.73) が成立する．

4.9 純虚数時間における遷移確率振幅に対する経路積分表示

これまでに確立した経路積分表示を用いて "純虚数時間における状態の遷移確率振幅" ――$\left\langle f_0, e^{-(t_1-t_0)\overline{H}_V} f_1 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V} f_n \right\rangle$ という型の量 ――に対する経路積分表示を導こう．たとえば，(4.74) により，$f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left\langle f_0, e^{-\beta\overline{H}_V} f_1 \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} dx f_0(x)^* \mathrm{E}_x \left[f_1(b(\beta))\, e^{-\int_0^\beta V(b(t))dt} \right], \quad \beta > 0 \quad (4.78)$$

である（他の諸量も同様）．問題は，右辺を 1 つの測度空間上の経路に関する積分によって表すことである．そのための基礎となる事実を補題として述べる：

【補題 4.23】 $n \in \mathbb{N}, 0 < t_1 < \cdots < t_n$, $f : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{C}$（ボレル可測）とし

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} |f(y_1,\cdots,y_n)| P_{t_1}(x,y_1) P_{t_2-t_1}(y_1,y_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)\,dy_1\cdots dy_n < \infty$$

が満たされるとする．このとき

$$\mathrm{E}_x[f(b(t_1),\cdots,b(t_n))] = \int_\Omega f(b(t_1)+x,\cdots,b(t_n)+x)\,dP_0. \tag{4.79}$$

証明　(4.79) の左辺を $L(f)$ とおくと

$$L(f) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1,\cdots,y_n) P_{t_1}(x,y_1) P_{t_2-t_1}(y_1,y_2) \times\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)\,dy_1\cdots dy_n.$$

そこで，変数変換 $z_j = y_j - x$ を行い，$P_t(x',y') = P_t(0,y'-x')$ ($t\ge 0,\ x',y'\in \mathbb{R}^d$) という性質に注意すれば

$$L(f) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x+z_1,\cdots,x+z_n) P_{t_1}(0,z_1)\left[\prod_{j=1}^{n-1} P_{t_{j+1}-t_j}(z_j,z_{j+1})\right] dz_1\cdots dz_n.$$

これは (4.79) の右辺に等しい．　■

【補題 4.24】　定理 4.20 の仮定のもとで

$$\mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\,e^{-\int_0^{t_n} V(b(s))\,ds}\right] = \mathrm{E}_0\left[f_1(b(t_1)+x)\cdots f_n(b(t_n)+x)\,e^{-\int_0^{t_n} V(b(s)+x)\,ds}\right],\ \text{a.e.}x\in\mathbb{R}^d. \tag{4.80}$$

証明　まず，$V\in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ の場合を考え，(4.80) の左辺を $L(f)$ とする．ルベーグの優収束定理により（定理 4.19 の証明を参照）

$$L(f) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_x\left[f_1(b(t_1))\cdots f_n(b(t_n))\,e^{-\sum_{j=1}^N t_n V(b(js/N))/N}\right].$$

右辺に補題 4.23 を応用すれば

$$L(f) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_0\left[f_1(b(t_1)+x)\cdots f_n(b(t_n)+x)\,e^{-\sum_{j=1}^N t_n V(b(js/N)+x)/N}\right] = \mathrm{E}_0\left[f_1(b(t_1)+x)\cdots f_n(b(t_n)+x)\,e^{-\int_0^{t_n} V(b(s)+x)\,ds}\right].$$

ここで，最後の等号を得るのに再びルベーグの優収束定理を応用した．

定理 4.20 の仮定を満たす一般の V に対しては，定理 4.20 の証明と同様な極限議論を行えばよい． ∎

さて，$\mu_{\mathrm{L}}^{(d)}$ を $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度とし，$\mathbb{R}^d$ と Ω の直積集合

$$\mathsf{W} := \mathbb{R}^d \times \Omega \tag{4.81}$$

上の測度 μ_0 を

$$\mu_0 = \mu_{\mathrm{L}}^{(d)} \otimes P_0 \ (\text{直積測度}) \tag{4.82}$$

によって導入する．これは有界測度ではない（したがって確率測度ではない）が，σ 有限な測度である．測度 μ_0 を**ルベーグ–ウィーナー測度**と呼ぶ．

各 $t \geq 0$ に対して，写像 $\varphi(t) : \mathsf{W} \to \mathbb{R}^d$ を

$$\varphi(t)(x, \omega) := b(t)(\omega) + x, \quad (x, \omega) \in \mathsf{W} \tag{4.83}$$

によって定義する．$b(0)(\omega) = 0$, P_0-a.e.ω ((4.65) で $x = 0$ の場合) でるあるから，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\varphi(0)(x, \omega) = x, \quad \mu_0\text{-a.e.}(x, \omega) \tag{4.84}$$

が成り立つことに注意しよう．

次の補題は，$\varphi(t)$ に関わる計算の基本となるものである：

【補題 4.25】 $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \cdots < t_n$ とする．F を $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^n$ 上のボレル可測関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^n} |F(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)| P_{t_1}(x, x_1) \prod_{j=2}^{n} P_{t_j - t_{j-1}}(x_{j-1}, x_j)\, dx\, dx_1 \cdots dx_n < \infty \tag{4.85}$$

を満たすものとする．このとき

$$\int_{\mathsf{W}} F(\varphi(0), \varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n))\, d\mu_0 = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} F(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) P_{t_1}(x, x_1) \times \prod_{j=2}^{n} P_{t_j - t_{j-1}}(x_{j-1}, x_j)\, dx\, dx_1 \cdots dx_n. \tag{4.86}$$

証明　次の式変形による：

$$\begin{aligned}\int_{\mathsf{W}} F(\varphi(0),\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\,d\mu_0 &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_\Omega F(x,b(t_1)+x,\cdots,b(t_n)+x)\,dP_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx F(x,y_1+x,\cdots y_n+x) P_{t_1}(0,y_1) \\ &\quad \times \prod_{2=1}^{n} P_{t_j-t_{j-1}}(y_{j-1},y_j)\,dy_1\cdots dy_n.\end{aligned}$$

そこで，変数変換 $x_j = y_j + x$ $(j = 1, \cdots, n)$ を行えばよい（この式変形における積分の順序交換は，条件 (4.85) とフビニの定理により正当化される）．■

ルベーグ–ウィーナー測度 μ_0 の基本的な性質の 1 つが次の補題によって与えられる：

【補題 4.26】　$s > 0$, $0 < t_1 < \cdots < t_n$ とする．F を $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$ 上のボレル可測関数で

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d)^{n+1}} &|F(x+x_0, x+x_1, \cdots, x+x_n)| P_s(0,x_0) P_{t_1}(x_0,x_1) \\ &\times P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\,dx\,dx_0\,dx_1\cdots dx_n < \infty \qquad (4.87)\end{aligned}$$

を満たすものとする．このとき

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{W}} F(\varphi(s), \varphi(t_1+s), \cdots, \varphi(t_n+s))\,d\mu_0 \\ &= \int_{\mathsf{W}} F(\varphi(0), \varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n))\,d\mu_0. \qquad (4.88)\end{aligned}$$

証明　$(t_1+s)-s = t_1$, $(t_j+s)-(t_{j-1}+s) = t_j - t_{j-1}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に注意すれば，補題 4.25 を用いることにより

$$\begin{aligned}(4.88)\text{ の左辺} = \int_{\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d)^{n+1}} &F(x+x_0,x+x_1,\cdots,x+x_n) P_s(0,x_0) P_{t_1}(x_0,x_1) \\ &\times P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\,dx\,dx_0\,dx_1\cdots dx_n. \qquad (4.89)\end{aligned}$$

フビニの定理の応用により，右辺の積分の順序は任意でよいことがわかる．したがって，x_0 を固定して，$y = x + x_0$, $y_j = x_j - x_0$ $(j = 1, \cdots, n)$ という変

数変換を行うと

$$(4.89)\text{ の右辺}=\int_{\mathbb{R}^d}dx_0\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}}dydy_1\cdots dy_nF(y,y_1+y,y_2+y,\cdots,y_n+y)\\ \times P_s(0,x_0)P_{t_1}(0,y_1)P_{t_2-t_1}(y_1,y_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n) \quad (4.90)$$

を得る．そこで，再びフビニの定理を応用し，x_0 に関する積分を行うと $\int_{\mathbb{R}^d} P_s(0,x_0)\,dx_0=1$ であるから

$$\begin{aligned}(4.90)\text{ の右辺} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}}dy\,dy_1\cdots dy_nF(y,y_1+y,y_2+y,\cdots,y_n+y)\\ &\quad\times P_{t_1}(0,y_1)P_{t_2-t_1}(y_1,y_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)\\ &= \int_{\mathsf{W}}F(\varphi(0),\varphi(t_1),\varphi(t_2),\cdots,\varphi(t_n))\,d\mu_0\end{aligned}$$

となる．したがって，(4.88) が成立する． ∎

関係式 (4.88) をルベーグ–ウィーナー測度 μ_0 の**時間並進対称性**または**時間並進不変性**と呼ぶ.

【定理 4.27】 定理 4.20 の仮定のもとで，任意の $n\in\mathbb{N}$, $0\le t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, $f_1,\cdots,f_{n-1}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_0,f_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}&\left\langle f_0, e^{-(t_1-t_0)\overline{H}_V}f_1\,e^{-(t_2-t_1)\overline{H}_V}f_2\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V}f_n\right\rangle\\ &\quad=\int_{\mathsf{W}}f_0(\varphi(t_0))^*f_1(\varphi(t_1))\cdots f_n(\varphi(t_n))\,e^{-\int_{t_0}^{t_n}V(\varphi(s))\,ds}\,d\mu_0. \quad (4.91)\end{aligned}$$

特に，すべての $s\ge 0$, $t>0$, $0\le s<t$, $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left\langle g, e^{-(t-s)\overline{H}_V}f\right\rangle=\int_{\mathsf{W}}g(\varphi(s))^*f(\varphi(t))\,e^{-\int_s^tV(\varphi(u))\,du}\,d\mu_0. \quad (4.92)$$

証明 まず，V が下に有界な場合を考え，$V_0:=\mathrm{ess.inf}_{x\in\mathbb{R}^d}V(x)$ とおく．(4.73) と補題 4.24 によって

$$\begin{aligned}&\left\langle f_0, e^{-(t_1-t_0)\overline{H}_V}f_1\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H}_V}f_n\right\rangle\\ &\quad=\int_{\mathbb{R}^d}dx\,f_0(x)^*\int_\Omega\left[\prod_{j=1}^n f_j(x+b(t_j-t_0))\right]\,e^{-\int_0^{t_n-t_0}V(x+b(s))\,ds}\,dP_0(\omega).\end{aligned} \quad (4.93)$$

積分に関するシュヴァルツの不等式によって

$$\int dx \int dP_0(\omega)|f_0(x)f_1(x+b(t_1-t_0))$$
$$\times \cdots f_n(x+b(t_n-t_0))\mid e^{-\int_0^{t_n-t_0} V(x+b(s))\,ds}$$
$$\le e^{-V_0(t_n-t_0)}\|f_0\| \int dP_0(\omega)\left(\int dx \prod_{j=1}^{n}|f_j(x+b(t_j-t_0))|^2\right)^{1/2}$$
$$\le e^{-V_0(t_n-t_0)}\|f_0\| \prod_{j=1}^{n-1}\|f_j\|_\infty \int dP_0(\omega)\left(\int dx|f_n(x+b(t_n-t_0))|^2\right)^{1/2}$$
$$= e^{-V_0(t_n-t_0)}\|f_0\| \prod_{j=1}^{n-1}\|f_j\|_\infty\|f_n\| < \infty.$$

したがって，フビニの定理によって，(4.93) の右辺は

$$\int_{\mathsf{W}} d\mu_0 f_0(\varphi(0))^* f_1(\varphi(t_1-t_0))\cdots f_n(\varphi(t_n-t_0))\, e^{-\int_0^{t_n-t_0} V(\varphi(s))\,ds}$$

に等しい．補題 4.26 によって，この式は

$$\int_{\mathsf{W}} d\mu_0 f_0(\varphi(t_0))^* f_1(\varphi(t_1))\cdots f_n(\varphi(t_n))\, e^{-\int_0^{t_n-t_0} V(\varphi(s+t_0))\,ds}$$

に等しいことがわかる[18]．変数変換 $s' = s + t_0$ により $\int_0^{t_n-t_0} V(\varphi(s+t_0))\,ds = \int_{t_0}^{t_n} V(\varphi(s'))\,ds'$ である．したがって，(4.91) が得られる．

V が下に有界でない場合には，いま証明した (4.91) をもとにして，定理 4.20 の証明と同様な極限議論を行えばよい．■

W の各点 (x,ω) は $(x,\omega)(t) := \omega(t) + x$, $t \in [0,\infty)$ によって，$[0,\infty)$ から $\mathbb{R}^d$ への写像と見ることができる．すでに述べたように，P_0-a.e.ω に対して，$\omega(t)$ は t について連続であるので，(x,ω) は連続写像（$\mathbb{R}^d$ 内の曲線）である．したがって，連続な経路である．ゆえに，測度 μ_0 による積分は，$\mathbb{R}^d$ 内の連続な経路の集合上の積分と見ることができる．この意味で，μ_0 による積分は経路積分なのである．

---

[18] $e^{-\int_0^{t_n-t_0} V(\varphi(s))\,ds}$ の部分については

$$e^{-\int_0^{t_n-t_0} V(\varphi(s))\,ds} = \lim_{N\to\infty} e^{-(t_n-t_0)/N \sum_{j=1}^{N} V(\varphi(j(t_n-t_0)/N))}$$

まで戻って考えればよい．

経路積分表示 (4.92) の 1 つの応用として，次の定理を得る：

【定理 4.28】（最低エネルギーの経路積分表示） 条件 (H') のもとで，任意の $f \in \mathcal{E}(\overline{H}_V)$（$\mathcal{E}(\overline{H}_V)$ は (3.27) で $H = \overline{H}_V$ の場合の集合）に対して

$$E_0(\overline{H}_V) = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\left(\int_{\mathsf{W}} f(\varphi(0))^* f(\varphi(t))\, e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\, d\mu_0\right). \quad (4.94)$$

証明 定理 3.7 と (4.92) を使えばよい． ∎

4.10 L^2 連続性

関数 $\varphi(t)$ は連続版で考える．このとき，$\mathbb{R}^d$ 上の任意の連続関数 f に対して，$f(\varphi(t))$ は μ_0 に関してほとんどいたるところの点で t について連続である．だが，この各点連続性だけでは，十分な理論展開をするのは難しい．そこで，後の理論で必要となる連続性について述べておく．

$\mathbb{R}^d$ の点 $x = (x_1, \cdots, x_d)$ の第 α 座標変数 x_α $(\alpha = 1.\cdots, d)$ に関する一般化された偏微分作用素を D_α で表す．

【定理 4.29】 $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $D_\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(\alpha = 1, \cdots, d)$ とする．このとき，任意の $t > 0, t + h > 0$ に対して

$$\|f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))\|^2_{L^2(\mathsf{W},d\mu_0)} \le \frac{|h|}{m}\left(\sum_{\alpha=1}^d \|D_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^2. \quad (4.95)$$

証明 $\mathbb{R}^d$ 上の任意の連続微分可能な関数 g に対して成立する公式

$$g(x) - g(y) = \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 (D_\alpha g)(y + s(x-y))(x_\alpha - y_\alpha)\,ds, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \quad (4.96)$$

を応用すると

$$\begin{aligned} & f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 (D_\alpha f)(x + b(t) + s(b(t+h) - b(t)))(b_\alpha(t+h) - b_\alpha(t))\,ds. \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\|f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))\|^2_{L^2(\mathsf{W},d\mu_0)}$$
$$\leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \int dx\, dP_0 \int_0^1 ds \int_0^1 ds' |(D_\alpha f)(x + b(t) + s(b(t+h) - b(t)))|$$
$$\times |(D_\beta f)(x + b(t) + s'(b(t+h) - b(t)))|$$
$$\times |b_\alpha(t+h) - b_\alpha(t)||b_\beta(t+h) - b_\beta(t)|.$$

$\int dx$ についてシュヴァルツの不等式を使い，ルベーグ測度の並進不変性を用いると

$$\|f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))\|^2_{L^2(\mathsf{W},d\mu_0)}$$
$$\leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \|D_\alpha f\|\|D_\beta f\| \int dP_0 |b_\alpha(t+h) - b_\alpha(t)||b_\beta(t+h) - b_\beta(t)|.$$

今度は $\int dP_0$ についてシュヴァルツの不等式を使えば

$$\int dP_0 |b_\alpha(t+h) - b_\alpha(t)||b_\beta(t+h) - b_\beta(t)|$$
$$\leq \sqrt{\mathrm{E}_0[(b_\alpha(t+h) - b_\alpha(t))^2]}\sqrt{\mathrm{E}_0[(b_\beta(t+h) - b_\beta(t))^2]} = \frac{|h|}{m}.$$

ゆえに (4.95) が成立する．■

4.11　正値性改良作用素の理論と基底状態の一意性

シュレーディンガー半群の経路積分表示の応用の 1 つとして，シュレーディンガー型作用素の基底状態（3.4 節を参照）の一意性に関する定理を証明する．基底状態の一意性の問題は，シュレーディンガー型作用素に限らず，他の量子力学のモデルや量子場の理論でも重要な主題の 1 つであるので，まず，一般論を展開する．

4.11.1　正値性保存作用素と正値性改良作用素

$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を σ 有限な測度空間とし，$L^2(X, \mathfrak{B}, \mu) = L^2(X, d\mu)$ と記す．

一般に，測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の可測関数 f が $f(x) > 0$，μ-a.e.x を満たすとき，f は**狭義正値** (strictly positive) であるという．この場合，$f > 0$ と記す．

また，$f(x) \geq 0$, μ-a.e.x のとき，f は**非負**または**正値**であるといい，このことを $f \geq 0$ と記す．

【定義 4.30】 (Y, ν) を σ 有限な測度空間とし（σ 加法族の表記は省略），$T : L^2(X, d\mu) \to L^2(Y, d\nu)$ を有界線形作用素とする[19]（$D(T) = L^2(X, d\mu)$ とする）．

(i) $f \geq 0$, $f \in L^2(X, d\mu)$ ならば，つねに $Tf \geq 0$ であるとき，T は**正値性を保存する** (positivity preserving) といい，T を**正値性保存作用素**とよぶ．

(ii) $f \geq 0$, $f \in L^2(X, d\mu) \setminus \{0\}$ ならば，つねに $Tf > 0$ であるとき（換言すれば，T は零でない正値関数を狭義正値関数に移すということ），T は**正値性を改良する** (positivity improving) といい，T を**正値性改良作用素**とよぶ．

明らかに，正値性改良作用素は正値性保存作用素である．だが，逆は一般には成立しない．また，上の (ii) からわかるように，正値性改良作用素は零作用素ではない．

■**例 4.31** $L^2(\mathbb{R})$ において，閉区間 $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ の定義関数 $\chi_{[a,b]}$ による掛算作用素（同じ記号 $\chi_{[a,b]}$ で表す）が正値性保存作用素であることは容易にわかる．だが，$\chi_{[a,b]}$ は正値性改良作用素ではない．たとえば，$f(x) := \chi_{[b+1,b+2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ とすれば，$f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ であるが，$\chi_{[a,b]} f = 0$ となる．

定理 4.5-(iii) から次の結果を得る：

【定理 4.32】 任意の $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H_0}$ は正値性改良作用素である．

次の定理は，自己共役作用素の和の閉包によって生成される熱半群が正値性保存作用素となるための十分条件を与える：

【定理 4.33】 A, B を $L^2(X, d\mu)$ 上の下に有界な自己共役作用素とし，$A + B$ は本質的に自己共役であるとする．さらに，すべての $t > 0$ に対して，e^{-tA}, e^{-tB} はともに正値性保存作用素であるとする．このとき，すべての $t > 0$ に対

[19] $(Y, \nu) = (X, \mu)$ の場合も含む．

して，$e^{-t\overline{(A+B)}}$ は正値性保存作用素である．

証明 トロッター–加藤の積公式（付録 C の定理 C.22）によって，すべての $f \in L^2(X, d\mu)$ に対して

$$e^{-t\overline{(A+B)}} f = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}\, e^{-tB/n}\right)^n f.$$

仮定により，$f \geq 0$ ならば $e^{-tA/n}e^{-tB/n} f \geq 0$ となるので，$\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n f \geq 0$．自然数列の部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(n_k < n_{k+1},\ n_k \to \infty\ (k \to \infty))$ が存在して

$$\left(e^{-t\overline{(A+B)}} f\right)(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\left(e^{-tA/n_k}\, e^{-tB/n_k}\right)^{n_k} f\right)(x), \quad \mu\text{-a.e.}x.$$

したがって，$\left(e^{-t\overline{(A+B)}} f\right)(x) \geq 0$, μ-a.e.x. ゆえに題意が成立する． ∎

一般に，$L^2(X, d\mu)$ から $L^2(Y, d\nu)$ への有界線形作用素 T が任意の実数値関数 $f \in L^2(X, d\mu)$ を実数値関数に移すとき，すなわち，Tf も実数値関数であるとき，T は**実性を保存する** (reality preserving) といい，この性質をもつ有界線形作用素を**実性保存作用素**と呼ぶ．

次の命題は，正値性保存作用素は実性保存作用素であることを語る：

【命題 4.34】 $T : L^2(X, d\mu) \to L^2(Y, d\nu)$ を正値性保存作用素とする．このとき，T は実性保存作用素である．

証明 $f \in L^2(X, d\mu)$ を実数値関数とする．このとき，$f_\pm(x) := \max\{\pm f(x), 0\}$, $x \in X$ とすれば，$f_\pm \geq 0$ であり，$f = f_+ - f_-$ と書ける．したがって，$Tf = Tf_+ - Tf_-$．T の正値性保存性により，$Tf_\pm \geq 0$．したがって，Tf は実数値関数である． ∎

【命題 4.35】 $T : L^2(X, d\mu) \to L^2(Y, d\nu)$ を有界線形作用素とする．

(i) T が正値性保存作用素であるための必要十分条件は，すべての非負関数 $f \in L^2(Y, d\nu)$, $g \in L^2(X, d\mu)$ に対して，$\langle f, Tg\rangle \geq 0$ が成立することである．

(ii) T が正値性改良作用素であるための必要十分条件は，すべての零でない非負関数 $f \in L^2(Y, d\nu) \setminus \{0\}$, $g \in L^2(X, d\mu) \setminus \{0\}$ に対して，$\langle f, Tg\rangle > 0$ が成り立つことである．

(iii) T が正値性保存作用素（正値性改良作用素）ならば，T^* も正値性保存作用素（正値性改良作用素）である．

証明 (i) 必要性は容易であるので，十分性を示す．そこで，すべての非負関数 $f \in L^2(Y, d\nu)$, $g \in L^2(X, d\mu)$ に対して，$\langle f, Tg \rangle \geq 0$ が成立するとする．仮に T が正値性保存作用素でないとすると，$g \in L^2(X, d\mu)$ で次の性質をもつものが存在する：(a) $g \geq 0$；(b) $A := \{y \in Y | (Tg)(y) < 0\}$ とすれば $\nu(A) > 0$. (Y, ν) は σ 有限であるから，可測集合 Y_n で $Y_n \subset Y_{n+1}$, $0 < \nu(Y_n) < \infty$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ を満たすものが存在する．$A_n := Y_n \cap A$ とおく．$\nu(A) > 0$ であるから，$\nu(A_{n_0}) > 0$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．明らかに，$\nu(A_{n_0}) \leq \nu(Y_{n_0}) < \infty$ であるから，A_{n_0} の定義関数 $\chi_{A_{n_0}}$ は $L^2(Y, d\nu)$ に属し，非負である．だが，$\langle \chi_{A_{n_0}}, Tg \rangle = \int_{A_{n_0}} (Tg)(y)\, d\nu(y) < 0$ となるので矛盾である．

(ii) (必要性) T を正値性改良作用素とすれば，任意の非負関数 $g \in L^2(X, d\mu) \setminus \{0\}$ に対して，$Tg > 0$. したがって，任意の非負関数 $f \in L^2(Y, d\nu) \setminus \{0\}$ に対して $\langle f, Tg \rangle > 0$（仮に，これが 0 だとすれば，$\nu$ に関するある零集合を除いて，$f(y) = 0$. したがって，$L^2(Y, d\nu)$ の元として $f = 0$ となり矛盾）．

（十分性）(i) より，T は正値性保存作用素である．仮に，T が正値性改良作用素でないとすると，ある $g \in L^2(X, d\mu) \setminus \{0\}$ に対して，$B := \{y \in Y | (Tg)(y) = 0\}$ の ν 測度が正となるものがある：$\nu(B) > 0$. (i) と同様に，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって，$0 < \nu(B \cap Y_{n_0}) < \infty$. そこで，$f$ として $\chi_{B \cap Y_{n_0}}$ をとると

$$\langle \chi_{B \cap Y_{n_0}}, Tg \rangle = \int_{B \cap Y_{n_0}} (Tg)(y)\, d\nu(y) = 0.$$

だが，これは仮定に反する．

(iii) T を正値性保存作用素とすれば，任意の非負関数 $f \in L^2(Y, d\nu), g \in L^2(X, d\mu)$ に対して，$\langle f, Tg \rangle \geq 0$ であるから，$\langle f, Tg \rangle$ は実数であり，したがって，$0 \leq \langle f, Tg \rangle = \langle Tg, f \rangle = \langle g, T^* f \rangle$. これと (i) により，$T^*$ も正値性保存作用素である．

正値性改良作用素についても同様．∎

【定理 4.36】 定理 4.20 の仮定のもとで，すべての $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta \overline{H}_V}$ は正値性改良作用素である．

証明　任意の非負関数 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ に対して，(4.92) によって

$$\left\langle g, e^{-\beta \overline{H}_V} f \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} g(x) f(b(\beta)+x)\, e^{-\int_0^\beta V(b(s)+x)\, ds}\, d\mu_0 \geq 0.$$

したがって，仮に，$\left\langle g, e^{-\beta \overline{H}_V} f \right\rangle = 0$ とすれば，μ_0-a.e.(x,ω) に対して

$$g(x) f(b(\beta)+x)\, e^{-\int_0^\beta V(b(s)+x)\, ds} = 0.$$

したがって，$g(x) f(b(\beta)+x) = 0$, μ_0-a.e.(x,ω)．これは

$$0 = \int_{\mathsf{W}} g(x) f(b(\beta)+x)\, d\mu_0 = \left\langle g, e^{-\beta H_0} f \right\rangle$$

を導く．だが，定理 4.32 と命題 4.35-(ii) によって，$\left\langle g, e^{-\beta H_0} f \right\rangle > 0$ でなければならないので，これは矛盾である．したがって $\left\langle g, e^{-\beta \overline{H}_V} f \right\rangle > 0$．ゆえに，命題 4.35-(ii) によって，題意が成立する．　■

4.11.2　基底状態の一意性

T を $L^2(X, d\mu)$ 上の有界な自己共役作用素とすれば, $\|T\| - T$（$\|T\|$ は T の作用素ノルム）は非負作用素である．また，$\|T\|$ と $-\|T\|$ の少なくとも一方は T のスペクトル $\sigma(T)$ に属するので，$\|T\|$ は T の固有値になりうる．次の定理は，T が正値性改良作用素ならば，$\|T\|$ が T の固有値であるとき，その多重度は必ず 1 であることを語る：

【定理 4.37】　T を $L^2(X, d\mu)$ 上の有界な自己共役作用素とし，$\|T\|$ は T の固有値であるとする．さらに T は正値性改良作用素であるとしよう．このとき，$\|T\|$ の多重度は 1 であり（$\dim\ker(T - \|T\|) = 1$），T の固有ベクトルとして，μ-a.e. で正の関数がとれる．すなわち，$f > 0$ かつ $Tf = \|T\| f$ を満たすものが存在する．

証明　$f \in \ker(T - \|T\|)$ を任意にとり，$f = f_1 + i f_2$ と書く．ただし，f_1, f_2 はそれぞれ，f の実部，虚部である．$Tf = \|T\| f$ と命題 4.34 により，$Tf_j = \|T\| f_j$ $(j = 1, 2)$ が成り立つ．したがって，はじめから f は実数値関数であるとして，一般性を失わない．すると，$f = f_+ - f_-$ と分解できるので（命題 4.34 の証明を参照），$Tf_+ - Tf_- = \|T\| f_+ - \|T\| f_-$ となる．したがって，

$(\|T\|-T)f_+ = (\|T\|-T)f_- \cdots (*)$．すでに注意したように，$\|T\|-T \geq 0$ であるから，

$$0 \leq \langle f_+, (\|T\|-T)f_+\rangle = \langle f_+, (\|T\|-T)f_-\rangle .$$

これと $\langle f_+, f_-\rangle = 0$ を用いると，$\langle f_+, Tf_-\rangle \leq 0$ となる．この結果と命題 4.35-(i) により，$\langle f_+, Tf_-\rangle = 0$．したがって，$(*)$ により，$\langle f_+, (\|T\|-T)f_+\rangle = 0$ となる．$\|T\|-T \geq 0$ であるから，これは $(\|T\|-T)f_+ = 0$ を意味する[20]．したがって，$Tf_+ = \|T\|f_+$．これと $(*)$ により，$Tf_- = \|T\|f_-$．ゆえに，$|f| = f_+ + f_-$ も固有値 $\|T\|$ に属する，T の固有関数である．これは，また，$|f| \pm f \geq 0$ もそうであることを意味する．すると，T の正値性改良性により，$|f| \pm f \neq 0$ ならば $|f| \pm f > 0$（複合同順）であるので，$f < 0$ または $f > 0$ が導かれる．よって，T の固有ベクトルとして正の関数がとれることがわかる（$f < 0$ の場合は，$-f$ をとればよい）．

次に $\|T\|$ の多重度が 1 であることを示そう．そこで，いま，仮に $\dim\ker(T - \|T\|) \geq 2$ とすれば，前段の結果により，直交する正の関数 f, g で $Tf = \|T\|f$, $Tg = \|T\|g$ を満たすものがとれる．この場合，$\langle f, g\rangle > 0$．だが，これは矛盾である．ゆえに，$\dim\ker(T - \|T\|) = 1$ である． ∎

定理 4.37 では，$\|T\|$ が T の固有値であることを仮定したが，$\|T\|$ が実際に T の固有値となるための十分条件（量子力学への応用においては，基底状態の存在に関する十分条件）についても考察することができる．詳細については，江沢 洋・新井朝雄，『場の量子論と統計力学』(日本評論社，1988）の 3.5 節を参照されたい．

定理 4.37 は，自己共役作用素の基底状態の一意性と狭義正値性の証明に応用されうる：

【定理 4.38】 H を $L^2(X, d\mu)$ 上の下に有界な自己共役作用素とする．もし，ある正数 $\beta_0 > 0$ に対して，$e^{-\beta_0 H}$ が正値性改良作用素ならば，H の基底状態は，存在すれば，定数倍を除いてただ 1 つであり，H の基底状態として，狭義正値

[20] 一般に，A をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の非負自己共役作用素とするとき，ベクトル $\psi \in D(A)$ が $\langle \psi, A\psi\rangle = 0$ を満たすならば $A\psi = 0$ が成り立つ（$\because$ A のスペクトル測度を E_A とすれば，$0 = \int_{[0,\infty)} \lambda\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2$．これは，$\|E_A((0,\infty))\psi\|^2 = 0$ を意味する．したがって，$\|A\psi\|^2 = \int_{\{0\}} \lambda^2\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 = 0$．スペクトル測度を用いない別証明もある（拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997）の定理 6.16 の証明を参照）．

関数がとれる.

証明　$T = e^{-\beta_0 H}$ とし，ψ_0 を H の基底状態とする：$\psi_0 \in D(H) \setminus \{0\}$, $H\psi_0 = E_0(H)\psi_0$. 作用素解析により，$T\psi_0 = \lambda\psi_0$. ただし，$\lambda := e^{-\beta_0 E_0(H)}$. (3.15) によって，$\lambda = \|T\|$. したがって，$\psi_0 \in \ker(T - \|T\|)$. ゆえに，定理 4.37 によって，$\psi_0$ は定数倍を除いて一意的であり，ψ_0 として，μ-a.e. 正のものがとれる. ∎

【定理 4.39】　定理 4.20 の仮定のもとで，$\overline{H}_V$ の基底状態が存在するならば，それは定数倍を除いて，ただ 1 つであり，ルベーグ測度に関して狭義正値のものがとれる.

証明　$T = e^{-\beta \overline{H}_V}$ とおくと，定理 4.36 により，T は正値性改良作用素である. したがって，定理 4.38 により題意がしたがう. ∎

4.12　$e^{-t\overline{H}_V}$ の積分核

すでに知っているように，自由ハミルトニアン H_0 が生成する熱作用素 e^{-tH_0} $(t > 0)$ は $P_t(x,y)$ を積分核とする積分作用素である. では，ポテンシャル V が入った場合の熱作用素 $e^{-t\overline{H}_V}$ はどのような条件があれば積分作用素になるであろうか. この節では，汎関数積分表示を用いて，この問に対する 1 つの肯定的解答を与える.

厳密な論述に入る前に，読者の理解を助ける目的のために，まず，直観的・発見法的な議論をしよう. (4.74) は

$$\left(e^{-t\overline{H}_V} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{E}_x\left[e^{-\int_0^t V(b(s))ds}\delta(y - b(t))\right] f(y)\,dy$$

と形式的に表されることに注目する. ただし，$\delta(x)$ は d 次元のデルタ超関数である. したがって，$e^{-t\overline{H}_V}$ が積分核 $P_t^V(x,y)$ をもつならば，それは

$$P_t^V(x,y) = \mathrm{E}_x\left[e^{-\int_0^t V(b(s))ds}\delta(y - b(t))\right]$$

という汎関数積分表示をもつことが示唆される. 右辺は，Ω_x の部分集合 $\{\omega \in \Omega_x | b(t)(\omega) = y\}$ 上の P_x に関する積分とみることができる. したがって，

そのような積分を与える測度が存在するとし，それを $\mu_{0,x,y;t}$ とすれば

$$P_t^V(x,y) = \int_\Omega e^{-\int_0^t V(b(s))ds}\, d\mu_{0,x,y;t}$$

と書かれるであろう．これが以下の数学的に厳密な議論の発見法的動機付けである．

【補題 4.40】 $t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^d$ を任意に固定し，$0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t$, $n\in\mathbb{N}$ とする．このとき，Ω 上の確率測度 $\nu_{0,x,y;t}$ で $(b(t_1),\cdots,b(t_n))$ の結合分布が

$$\begin{aligned}&P_t(x,y)^{-1}P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\\ &\quad\times P_{t-t_n}(x_n,y)\,dx_1\cdots dx_n\end{aligned}$$

となるものが存在する：任意のボレル集合 $B\subset(\mathbb{R}^d)^n$ に対して

$$\begin{aligned}&\nu_{0,x,y;t}(\{\omega\mid(b(t_1),\cdots,b(t_n))\in B\})\\ &\quad=\int_B P_t(x,y)^{-1}P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\\ &\quad\quad\times P_{t-t_n}(x_n,y)\,dx_1\cdots dx_n.\end{aligned}\tag{4.97}$$

証明 $t_j\in[0,t]$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して，$(\mathbb{R}^d)^n$ 上の測度 $\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}$ を $t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$ ならば

$$\begin{aligned}&d\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}\\ &\quad=P_t(x,y)^{-1}P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\\ &\quad\quad\times P_{t-t_n}(x_n,y)\,dx_1\cdots dx_n\end{aligned}$$

によって定義する．そして，任意の $t_j\in[0,t]$ に対しては

$$\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}(B)=\nu_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(n)};x,y,t}(B_\sigma),\quad B\in\mathfrak{B}^{dn}$$

と定める．ただし，σ は $t_{\sigma(1)}\le\cdots\le t_{\sigma(n)}$ となる置換である．$P_s(x,y)$ の鎖則を用いることにより，$\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}$ は $(\mathbb{R}^d)^n$ 上の確率測度であり，$\{\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}\mid n\in\mathbb{N},\ t_j\in[0,t],\ j=1,\cdots,n\}$ は整合的であることがわかる．したがって，

コロモゴロフの定理（付録D，定理D.7）によって，測度 $\nu_{0,x,y;t}$ の存在が導かれる． ∎

各 $t>0$ と任意の $x,y\in\mathbb{R}^d$ に対して，Ω 上の測度 $\mu_{0,x,y;t}$ を

$$d\mu_{0,x,y;t} := P_t(x,y)\,d\nu_{0,x,y;t} \tag{4.98}$$

によって定義する．したがって

$$\mu_{0,x,y;t}(\Omega) = P_t(x,y) \tag{4.99}$$

となる．これは，特に，$\mu_{0,x,y;t}$ が Ω 上の有界測度であることを示す．

【補題 4.41】　$t_j\in[0,t)$ $(j=1,\cdots,n)$ とし，ボレル可測関数 $f:(\mathbb{R}^d)^{n+1}\to\mathbb{C}$ は $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t$ ならば

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} |f(x_1,\cdots,x_n,y)|P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n) \\ \times P_{t-t_n}(x_n,y)\,dx_1\cdots dx_n\,dy<\infty$$

を満たすとする．このとき

$$\mathrm{E}_x[f(b(t_1),\cdots,b(t_n),b(t))] = \int_{\mathbb{R}^d} dy\left(\int_\Omega f(b(t_1),\cdots,b(t_n),y)\,d\mu_{0,x,y;t}\right) \tag{4.100}$$

証明　分布測度の置換対称性により，$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ の場合を示せば十分である．このとき

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_x\left[f(b(t_1),\cdots,b(t_n),b(t))\right] \\
&\quad = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} f(x_1,\cdots,x_n,y)P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n) \\
&\qquad \times P_{t-t_n}(x_n,y)\,dx_1\cdots dx_n\,dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} dyP_t(x,y)\left(\int_{(\mathbb{R}^d)^n} d\nu_{t_1,\cdots,t_n;x,y,t}f(x_1,\cdots,x_n,y)\right) \\
&\qquad\qquad (\because\ \text{フビニの定理}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} dy\left(\int_\Omega f(b(t_1),\cdots,b(t_n),y)\,d\mu_{0,x,y;t}\right).
\end{aligned}$$

∎

さて，$e^{-\int_0^t V(b(s))ds} \geq 0$ であるから，$+\infty$ の値も許して

$$P_t^V(x,y) := \int_\Omega e^{-\int_0^t V(b(s))\,ds}\,d\mu_{0,x,y;t}, \quad t>0,\ x,y \in \mathbb{R}^d \tag{4.101}$$

が定義される．明らかに，$P_t^V(x,y) \geq 0$.

【定理 4.42】 条件 (H') のもとで，任意の $t>0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left(e^{-t\overline{H}_V} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t^V(x,y) f(y)\,dy, \quad \text{a.e.}x \in \mathbb{R}^d \tag{4.102}$$

が成り立つ．

証明 まず，$V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える．このとき，(4.74) とルベーグの優収束定理を用いることにより

$$\left(e^{-t\overline{H}_V} f\right)(x) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_x\left[f(b(t))\,e^{-\sum_{k=1}^N \frac{t}{N} V(b(kt/N))}\right].$$

一方，補題 4.41 によって

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_x\left[f(b(t))e^{-\sum_{k=1}^N tV(b(kt/N))/N}\right]\\&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} dy \left(\int_\Omega e^{-\sum_{k=1}^N tV(b(kt/N)/N}\,d\mu_{0,x,y;t}\right) f(y).\end{aligned}$$

$V \geq V_0$（定数）とすれば

$$|f(y)\,e^{-\sum_{k=1}^N tV(b(kt/N)/N}| \leq |f(y)|\,e^{-tV_0}$$

であり

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_\Omega d\mu_{0,x,y;t}|f(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x,y)|f(y)|\,dy < \infty.$$

である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_x\left[f(b(t))\,e^{-\sum_{k=1}^N tV(b(kt/N))/N}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} P_t^V(x,y) f(y)\,dy$$

となる．ゆえに (4.102) が成立する．

次に V が下に有界でない場合を考え，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，V_N を V の下切断とする（4.8 節を参照）．前半の結果により，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(e^{-t\overline{H}_{V_N}} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t^{V_N}(x,y) f(y)\,dy$$

が成り立つ．無限大に発散する部分列 $\{N_k\}_k$ があって

$$\lim_{k\to\infty}\left(e^{-t\overline{H}_{V_{N_k}}}f\right)(x)=\left(e^{-t\overline{H}_V}f\right)(x),\quad \text{a.e.}x.$$

一方

$$\int_{\mathbb{R}^d}P_t^{V_N}(x,y)f(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_\Omega e^{-\int_0^t V_N(b(s))\,ds}\,d\mu_{0,x,y;t}\right)f(y)\,dy.$$

ところで，線形性により，(4.102) は $f\geq 0$ の場合に対して示せば十分である．そこで，$f\geq 0$ の場合を考えると，上式の積分の非積分関数は単調増大である．したがって，単調収束定理により

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_\Omega e^{-\int_0^t V(b(s))\,ds}\,d\mu_{0,x,y;t}\right)f(y)\,dy<\infty$$

であり，(4.102) が成り立つことが結論される．■

定理 4.42 は，条件 (H') のもとで，$e^{-t\overline{H}_V}$ が $P_t^V(x,y)$ を積分核とする積分作用素で与えられることを語る．$e^{-t\overline{H}_V}$ は自己共役であるから

$$P_t^V(x,y)=P_t^V(y,x),\quad \text{a.e.}(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \tag{4.103}$$

が成り立つ．

次に，$P_t^V(x,y)$ が x,y について連続かどうかを調べよう．というのも，一般的にいって，積分作用素の積分核の連続性や微分可能性は，より詳細な解析にとって重要な要素となるからである．この目的のために，その分布が x,y によらない確率変数を導入する．

各 $s\in[0,1]$ に対して，確率変数

$$\alpha(s):=b(s)-sb(1) \tag{4.104}$$

を導入する．命題 4.13 によって，$\alpha(s)$ は，確率空間 (Ω,P_0) 上の分散が $s(1-s)/m$，平均が 0 のガウス型確率変数である．同様にして，$\{\alpha(s)\mid s\in[0,1]\}$ は分散が

$$\mathrm{E}_0[\alpha(s)\alpha(t)]=\frac{1}{m}s(1-t)\quad(0\leq s\leq t\leq 1) \tag{4.105}$$

のガウス過程である．この型のガウス過程は**ブラウン的橋** (Brownian bridge) と呼ばれる．

【定理 4.43】 $V \in C_{\rm bb}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，任意の $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$P_t^V(x,y) = \mathrm{E}_0\left[\exp\left(-\int_0^t V\left(\left(1-\frac{s}{t}\right)x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha\left(\frac{s}{t}\right)\right)ds\right)\right]P_t(x,y). \tag{4.106}$$

特に，$P_t^V(x,y)$ は (x,y) の連続関数である．

証明　確率空間 (Ω, P_0) 上の確率変数

$$u(s) := \left(1-\frac{s}{t}\right)x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha\left(\frac{s}{t}\right)$$

の特性関数は

$$C_{u(s)}(k) = \exp\left[-\frac{k^2}{2m}s\left(1-\frac{s}{t}\right)\right]\exp\left[i\left(1-\frac{s}{t}\right)kx + i\frac{s}{t}ky\right], \quad k \in \mathbb{R}^d$$

と計算される．他方

$$\int_\Omega e^{ikb(s)}\,d\nu_{0,x,y;t} = \int e^{ikz}P_t(x,y)^{-1}P_s(x,z)P_{t-s}(z,y)\,dz.$$

直接計算により

$$\int e^{ikz}P_s(x,z)P_{t-s}(z,y)\,dz$$
$$= P_t(x,y)\exp\left[-\frac{k^2}{2m}s\left(1-\frac{s}{t}\right)\right]\exp\left[i\left(1-\frac{s}{t}\right)kx + i\frac{s}{t}ky\right]$$

となることがわかる．したがって，$u(s)$ の分布と確率空間 $(\Omega, \nu_{0,x,y;t})$ 上の確率変数としての $b(s)$ の分布は等しい．したがって

$$P_t^V(x,y) = P_t(x,y)\int_\Omega e^{-\int_0^t V(b(s))\,ds}\,d\nu_{0,x,y;t} = P_t(x,y)\mathrm{E}_0\left[e^{-\int_0^t V(u(s))\,ds}\right]$$

ゆえに (4.106) が成立する．

いま，$V \in C_{\rm bb}(\mathbb{R}^d)$ であるので，$V\left(\left(1-\frac{s}{t}\right)x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha\left(\frac{s}{t}\right)\right)$ は P_0-a.e.ω に対して，x, y の連続関数である．これと $P_t(x,y)$ が x, y について連続であること，およびルベーグの優収束定理を使うことにより，$P_t^V(x,y)$ の x, y に関する連続性が導かれる．　■

4.13 分配関数に対する汎関数積分表示

量子系のハミルトニアンを H とするとき，逆温度 $\beta > 0$ に対して，熱作用素 $e^{-\beta H}$ がトレース型ならば

$$Z_\beta := \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} \quad (e^{-\beta H} \text{ のトレース}) \tag{4.107}$$

という量が定義される[21]．量子統計力学では，Z_β は**分配関数** (partition function) と呼ばれ，重要な役割を演じる[22]．

この節では，しかるべき条件のもとで，$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta \overline{H}_V}$ に対する汎関数積分表示を確立し，そこから導かれる基本的な結果を論述する．

【補題 4.44】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ ならば，任意の $t, s > 0$ とすべての $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} dz P_t^V(x,z) P_s^V(z,y)\, dz = P_{t+s}^V(x,y) \tag{4.108}$$

が成り立つ．

証明　任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$e^{-t\overline{H}_V}\, e^{-s\overline{H}_V} f = e^{-(t+s)\overline{H}_V} f$$

であるから

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_t^V(x,z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_s^V(z,w) f(w) dw \right) dz = \int_{\mathbb{R}^d} P_{t+s}^V(x,w) f(w)\, dw, \quad \text{a.e.}x.$$

(4.106) から

$$0 \le P_t^V(x,y) \le e^{-tV_0} P_t(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{4.109}$$

が成り立つ．ただし，$V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^d} V(x)$．したがって

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |P_t^V(x,z) P_s^V(z,y) f(w)|\, dz\, dw \\
&\quad \le \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-(t+s)V_0} P_t(x,z) P_s(z,w) |f(w)|\, dz\, dw
\end{aligned}$$

---

[21] トレース型作用素の定義と関連する諸事実については，付録 C の C.8 節を参照．

[22] より詳しくは，拙著，『量子統計力学の数理』(共立出版，2008) を参照．

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(t+s)V_0} P_{t+s}(x,w)|f(w)|\,dw < \infty.$$

ゆえにフビニの定理により

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_t^V(x,z) P_s^V(z,w)\,dz \right) f(w)\,dw = \int_{\mathbb{R}^d} P_{t+s}^V(x,w) f(w)\,dw, \quad \text{a.e.}x.$$

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき，ルベーグの優収束定理を用いることにより，両辺とも x について連続であることがわかる．したがって，上式は，すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して成立する．同様して，$\int_{\mathbb{R}^d} P_t^V(x,z) P_s^V(z,w)\,dz$ も w について連続であることがわかる．そこで，$y \in \mathbb{R}^d$ を任意に固定し，$\varepsilon > 0$, $f(w) = \rho_\varepsilon(y-w)$（軟化子；付録 A，A.2 節を参照）ととり，$\varepsilon \to 0$ とすれば，(4.108) が得られる． ∎

【定理 4.45】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とし，任意の $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta \overline{H}_V}$ はトレース型であるとする．このとき，すべての $\beta > 0$ に対して

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta \overline{H}_V} = \int_{\mathbb{R}^d} P_\beta^V(x,x)\,dx \tag{4.110}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_\Omega e^{-\int_0^\beta V(b(s))ds}\,d\mu_{0,x,x;\beta}. \tag{4.111}$$

さらに

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta \overline{H}_V} = \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx\, \mathrm{E}_0 \left[\exp\left(-\int_0^\beta V\left(x + \sqrt{\beta}\alpha\left(\frac{s}{\beta}\right)\right) ds \right) \right] \tag{4.112}$$

が成り立つ．ただし，$\{\alpha(t)\}_{t\in[0,1]}$ はブラウン的橋である．

証明 任意の $t > 0$ に対して，$e^{-t\overline{H}_V} = e^{-t\overline{H}_V/2} e^{-t\overline{H}_V/2}$ であり，トレース型作用素はヒルベルト–シュミット型作用素であるので（付録 C，定理 C.24）

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta \overline{H}_V} = \left\| e^{-\beta \overline{H}_V/2} \right\|_2^2$$

となる．ただし，$\|\cdot\|_2$ はヒルベルト–シュミットノルムを表す[23]．$e^{-\beta \overline{H}_V/2}$ は積分作用素であるから，付録 C の定理 C.28 により

$$\left\| e^{-\beta \overline{H}_V/2} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left| P_{\beta/2}^V(x,y) \right|^2 dx\,dy$$

[23] 付録 C の C.8 節を参照．

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P^V_{\beta/2}(x,y) P^V_{\beta/2}(y,x)\, dy \right) dx$$

(∵ フビニの定理と (4.103))

$$= \int_{\mathbb{R}^d} P^V_\beta(x,x)\, dx \quad (\because\ (4.108)).$$

ゆえに (4.110) が成立する．(4.101) によって，(4.111) が得られる．(4.112) は (4.110) と定理 4.43 から導かれる． ∎

4.14 ゴールデン–トンプソン不等式と古典的極限

プランクの定数 h に比例する定数 $\hbar = h/2\pi$ は数学的にはパラメータと見ることができる．この場合，$\hbar$ を含む量子力学的な量 $Q_\hbar$ の $\hbar \to 0$ の極限 $Q_0 := \lim_{\hbar\to 0} Q_\hbar$ が存在するならば，Q_0 を $Q_\hbar$ の**古典的極限** (classical limit) と呼ぶ.

プランクの定数を復活させた単位系におけるハミルトニアン H_V は

$$H_V(\hbar) := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \tag{4.113}$$

という形をとる．これは，H_V において，m を $m/\hbar^2$ で置き換えて得られる作用素である．したがって，H_V に関する事実において，この置き換えを行うことにより，$H_V(\hbar)$ について対応する事実をただちに導くことができる.

H_V に対応する古典力学的ハミルトニアンは

$$H(x,p) := \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad x, p \in \mathbb{R}^d \tag{4.114}$$

である．このハミルトニアンに関する古典統計力学的分配関数は

$$Z^{\mathrm{cl}}_\beta(\hbar) := \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\, e^{-\beta H(x,p)}\, dx\, dp = \frac{m^{d/2}}{\hbar^d (2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(x)}\, dx \tag{4.115}$$

によって与えられる．ただし

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(x)}\, dx < \infty \tag{4.116}$$

を仮定する.

$e^{-t\hbar^2 H_0}$ の積分核 $P_{t\hbar^2}(x,y)$ から定まるウィーナー測度 P_0 を $P_0^{(\hbar)}$ と記し，この測度による期待値を $\mathrm{E}_0^{(\hbar)}[\,\cdot\,]$ で表す.

【定理 4.46】 $V \in C_{\rm bb}(\mathbb{R}^d)$ とし，すべての $\beta > 0$ に対して，(4.116) が成立し，$e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}}$ はトレース型作用素であるとする．このとき

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} \le Z_\beta^{\rm cl}(\hbar). \tag{4.117}$$

証明 (4.112) によって

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} = \frac{m^{d/2}}{\hbar^d (2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{E}_0^{(\hbar)}\left[e^{-\int_0^\beta V(x+\sqrt{\beta}\alpha(s/\beta))\,ds}\right] dx. \tag{4.118}$$

変数変換 $s' = s/\beta$ を行うと

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} = \frac{m^{d/2}}{\hbar^d (2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{E}_0^{(\hbar)}\left[e^{-\int_0^1 \beta V(x+\sqrt{\beta}\alpha(s))\,ds}\right] dx.$$

ds は $[0,1]$ 上の確率測度であるから，イエンゼンの不等式の応用（例 1.12）により

$$e^{-\int_0^1 \beta V(x+\sqrt{\beta}\alpha(s))\,ds} \le \int_0^1 e^{-\beta V(x+\sqrt{\beta}\alpha(s))}\,ds.$$

したがって

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} \le \frac{m^{d/2}}{\hbar^d (2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(x)}\,dx.$$

ゆえに (4.117) が成り立つ． ∎

不等式 (4.117) は量子力学的分配関数の**古典的限界** (classical bound) または**相空間限界** (phase space bound) と呼ばれる．

定理 4.46 に関して，より広い観点から，若干の注意と補足をしておく．

(i) 定理 4.46 はより一般的な V に対しても成立する．たとえば，V が下に有界で $V \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ かつ (4.116) を満たすならば，$e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}}$ はトレース型作用素であり，(4.117) が成立する．だが，この証明は簡単ではないので，ここでは割愛する[24]．

(ii) 不等式 (4.117) は，純作用素論的にも導くことができる．実際，次の美しい定理を応用すればよい：

---

[24] 詳しくは，B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics* (Academic Press, 1979) の Theorem 9.2 の証明を参照．

【定理 4.47】(ゴールデン (Golden)–トンプソン (Thompson) 不等式[25]**)**　$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間，A, B を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，$-A$, $-B$ はともに下に有界で $A+B$ は本質的に自己共役であるとする．さらに，$e^{B/2}\,e^{A}\,e^{B/2}$ はトレース型作用素であるとする．このとき，$e^{\overline{A+B}}$ はトレース型作用素であり

$$\operatorname{Tr} e^{A+B} \le \operatorname{Tr} e^{B/2}\,e^{A}\,e^{B/2} \tag{4.119}$$

が成り立つ．

この定理を $A=-\beta H_0$, $B=-\beta V$ の場合に応用する．ただし，V は下に有界で $V\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とする（このとき，定理 4.2 によって，H_V は本質的に自己共役である）．そこで，$T := e^{-\beta V/2}\,e^{-\beta H_0}\,e^{-\beta V/2}$ がトレース型作用素になる条件を探せばよい．$S = e^{-\beta H_0/2}\,e^{-\beta V/2}$ とおくと，$T = S^*S$ と書ける．一方，S は $K(x,y) := P_{\beta/2}(x,y)\,e^{-\beta V(y)/2}$ を積分核とする積分作用素であり

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} |K(x,y)|^2\,dx\,dy = \frac{m^{d/2}}{(2\pi\beta)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(y)}\,dy.$$

したがって，(4.116) が成り立つならば，S はヒルベルト–シュミット型作用素である（付録 C，定理 C.28 の応用）．ゆえに，T はトレース型作用素であり

$$\operatorname{Tr} T = \|S\|_2^2 = \int_{(\mathbb{R}^d)^2} |K(x,y)|^2\,dx\,dy = \frac{m^{d/2}}{(2\pi\beta)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(y)}\,dy.$$

また，ゴールデン–トンプソン不等式により，$\operatorname{Tr} e^{-\beta\overline{H}_V} \le \operatorname{Tr} T$．よって，(4.117) が得られる（いまの不等式で，m を $m/\hbar^2$ で置き換える）．

いま述べた証明の観点から，(4.117) は **(H_0, H_V) に付随するゴールデン–トンプソン不等式**と称される場合がある．

【定理 4.48】(古典的極限)　定理 4.46 の仮定のもとで

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{\operatorname{Tr} e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}}}{Z^{\mathrm{cl}}_{\beta}(\hbar)} = 1. \tag{4.120}$$

---

[25] 証明については，たとえば，M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.IV* (Academic Press, 1978) の p.320，Corollary を参照．

証明 $Q_\hbar := \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}}/Z_\beta^{\mathrm{cl}}(\hbar)$ とすれば，(4.117) によって

$$Q_\hbar \leq 1.$$

したがって，特に

$$\limsup_{\hbar\to 0} Q_\hbar \leq 1.$$

一方，分布までもどり，単純な変数変換をすることにより

$$\mathrm{E}_0^{(\hbar)}[f(b(t_1),\cdots,b(t_n))] = \mathrm{E}_0[f(\hbar b(t_1),\cdots,\hbar b(t_n))]$$

が成り立つことがわかる（両辺のいずれかは存在するとする）．この法則性と (4.118) により

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} = \frac{m^{d/2}}{\hbar^d(2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{E}_0\left[e^{-\int_0^\beta V(x+\hbar\sqrt{\beta}\alpha(s/\beta))\,ds}\right] dx.$$

したがって，ファトーの定理により

$$\begin{aligned}&\liminf_{\hbar\to 0} \hbar^d \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}}\\ &\geq \frac{m^{d/2}}{(2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{E}_0\left[\liminf_{\hbar\to 0} e^{-\int_0^\beta V(x+\hbar\sqrt{\beta}\alpha(s/\beta))\,ds}\right] dx.\end{aligned}$$

V の連続性により

$$\lim_{\hbar\to 0} \int_0^\beta V(x+\hbar\sqrt{\beta}\alpha(s/\beta))\,ds = \beta V(x).$$

ゆえに

$$\liminf_{\hbar\to 0} \hbar^d \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} \geq \frac{m^{d/2}}{(2\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta V(x)}\,dx.$$

これは，$\liminf_{\hbar\to 0} Q_\hbar \geq 1$ を意味する．よって，(4.120) が成立する． ∎

定理 4.48 は，$\hbar\to 0$ のとき，漸近的な意味で $\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\overline{H_V(\hbar)}} \sim Z_\beta^{\mathrm{cl}}(\hbar)$ となること，すなわち，量子力学的分配関数は対応する古典統計力学的分配関数に近づくことを語る．

✱注意 4.49 より高度な作用素論的・確率論的道具立てを使用することにより，(4.120) は，さらに広いクラスに属するポテンシャル V へと拡張されうる[26]．

[26] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics* (Academic Press, 1979) の Theorem 10.1 の証明を参照.

ノート

20 世紀における偉大な理論物理学者の一人であったファインマン（米，1918 〜1988）が発見した経路積分（1942，学位論文；1948）の着想は，本来，ハミルトニアン $\overline{H}_V$ が生成する強連続 1 パラメータユニタリ群 $e^{-it\overline{H}_V}$, $t \in \mathbb{R}$ に関するものであった．この型の経路積分は，本章で論じた純虚数時間における経路積分との対比においては，**実時間経路積分**と呼ばれる．物理的な描像で語るならば，時刻 0 の状態 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が時刻 t で状態 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ へ遷移する確率振幅 $\langle g, e^{-it\overline{H}_V} f\rangle$ を

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} dx\, dy\, g(x)^* f(y) \int_{C_{x,y}} e^{iS(\phi)} D\phi$$

という形に表示しようとするものである．ここで，$C_{x,y}$ は，曲線（経路）$\phi : [0,t] \to \mathbb{R}^d$ で $\phi(0) = x$, $\phi(t) = y$ を満たすものの全体であり，

$$S(\phi) := \int_0^t \left(\frac{m\phi'(s)^2}{2} - V(\phi(s)) \right) ds$$

は古典力学における作用汎関数を表し，$\int_{C_{x,y}} e^{iS(\phi)} D\phi$ は $C_{x,y}$ 全体にわたって，汎関数 $e^{iS(\phi)}$ をある種の仕方で足し上げることを表す（$D\phi$ は，形式的・象徴的にはある種の無限次元測度とみなされる）．これは，数学的には，トロッターの積公式（付録 C，定理 C.22-(i)）から導かれる式

$$\langle g, e^{-it\overline{H}_V} f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g, (e^{-itH_0/n}\, e^{-itV/n})^n f\rangle \tag{4.121}$$

を変形することによって得られる[27]．だが，右辺を無限次元空間上の測度に関する積分として表示することは（ある一般的な仮定のもとで）不可能であることが示される [5]．ところで，$\langle g, (e^{-itH_0/n}\, e^{-itV/n})^n f\rangle$ は，具体的に書き下してみればわかるように，$d(n+1)$ 次元のルベーグ測度に関する振動積分である（[2] の定理 8.11 を参照）．したがって，(4.121) の右辺は無限次元の振動積分の 1 つを定義するとみることが可能である．実際，この観点からの研究は多くの研究者によって遂行され，それなりの稔りをもたらした．この方面の研究については，たとえば，[10, 13, 15, 16, 17] を参照されたい（本 [15] に最近の研究まで含めた豊富な文献表がある）．

---

[27] 詳細については，[2] の 8 章，8.3.1 項を参照．

関連図書

[1] 新井朝雄,『ヒルベルト空間と量子力学』, 共立出版, 1997.

[2] 新井朝雄,『量子現象の数理』, 朝倉書店, 2006.

[3] 新井朝雄,『量子統計力学の数理』, 共立出版, 2008.

[4] 新井朝雄・江沢 洋,『量子力学の数学的構造 I, II』, 朝倉書店, 1999.

[5] R. Cameron, A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals, *J. Mathematics and Physics*, **39** (1960), 126–141.

[6] P. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 238–242.

[7] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer, 1987.

[8] 江沢 洋, 運動の法則,『岩波講座　現代物理学の基礎 [第 2 版] 4 量子力学 II』(湯川秀樹・豊田利幸 編, 岩波書店, 1978) の第 17 章.

[9] ファインマン・ヒッブス,『量子力学と経路積分』(北原和夫 訳), みすず書房, 1995.

[10] 藤原大輔,『ファインマン経路積分の数学的方法』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

[11] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[12] 飛田武幸,『ブラウン運動』, 岩波書店, 1975.

[13] G. W. Johnson and M. L. Lapidus, *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*, Oxford University Press, 2002.

[14] T. Kato, Trotter's product formula for arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups, in *Topics in Functional Analysis* (I. Gohberg and M. Kac, eds.), Academic Press, 1978, p.185–195.

[15] S. Mazzucchi, *Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications*, World Sientific, 2009.

[16] 中村 徹,『超準解析と物理学』, 日本評論社, 1998.

[17] E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Mathematical Physics*, **5** (1964), 332–343.

[18] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[19] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[20] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, American Mathematical Society, 2005.

[21] H. Trotter, On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545–551.

[22] 保江邦夫，『数理物理学方法序説 4 確率論』，日本評論社，2001.

[23] 保江邦夫，『数理物理学方法序説 5 変分学』，日本評論社，2001.

第5章

磁場の入った シュレーディンガー型作用素

5.1 ハミルトニアンの定義

第4章では，量子的粒子に対して古典的なポテンシャル V から定まる力——ポテンシャル力——だけが作用する場合を考察した．だが，系に外から働く力の場，すなわち，外場は，この種のものに限られるわけではない．たとえば，磁気に関わる現象を担う磁場はそのような外場の1つである．そこで，この章では，ポテンシャル V のほかに，古典的な磁場も考察下の量子系に作用している場合を取り扱う（量子的粒子は電荷をもつとする）[1]．古典電磁気学でよく知られているように，磁場は**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる対象から導かれる．ベクトルポテンシャルは，時間によらない場合，最も一般的には，$\mathbb{R}^d$ 上の超関数 a_j $(j = 1, \cdots, d)$ の組 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_d)$ として定義される（$\mathbb{R}^d$ の直交座標系 $(x_1, \cdots, x_d)$ に関する成分表示）．このベクトルポテンシャルに付随する"磁場"は，座標変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素 D_j を用いて定義される超関数

$$F_{jk} := D_j a_k - D_k a_j, \quad j, k = 1, \cdots, d \tag{5.1}$$

[1] 静電場（時間によらない電場）$\mathbf{E} = (E_1, \cdots, E_d)$ はポテンシャル力である．すなわち，スカラーポテンシャル $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ があって $E_j = -D_j\Phi$ と表される．したがって，この場合，$V = q\Phi + W$ と書ける．ただし，q は量子的粒子の電荷，W は量子的粒子に働く非電磁気的な力を記述するポテンシャルである．

の独立な組 $(F_{jk})_{1\le j<k\le d}$（成分表示）で与えられる[2]．ただし，$d=3$ の場合（いわゆる物理的な場合），磁場の成分表示として，通常

$$\mathbf{B} = (D_2a_3 - D_3a_2, D_3a_1 - D_1a_3, D_1a_2 - D_2a_1) = (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \qquad (5.2)$$

を採用する場合が多い．

■例 5.1　$d=3$ とし，x_1-x_2 平面と垂直な方向，すなわち，x_3 軸方向に一定の大きさ（強さ）の磁場がかかっている場合を考える．すなわち，$\mathbf{B}=(0,0,B)$（$B\in\mathbb{R}$ は定数）という場合である（$|B|$ が磁場の大きさを表す）．この場合のベクトルポテンシャルとして

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (-Bx_2, 0, 0), \quad (0, Bx_1, 0), \quad \frac{B}{2}(-x_2, x_1, 0), \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$$

のうちの任意の 1 つがとれる．

一般に，同一のヒルベルト空間で働く n 個の作用素の組 $\mathbf{T}=(T_1,\cdots,T_n)$，$\mathbf{S}=(S_1,\cdots,S_n)$ に対して，作用素 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$ を

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} := \sum_{j=1}^{n} T_jS_j \qquad (5.3)$$

によって定義する（この作用素の定義域は，線形作用素の和と積の定義にしたがって，$D(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}) = \bigcap_{j=1}^{n} D(T_jS_j)$ となる）．$\mathbf{T}=\mathbf{S}$ の場合

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}^2 \qquad (5.4)$$

とも記す．

各 $j=1,\cdots,d$ に対して

$$p_j := -iD_j \qquad (5.5)$$

とし

$$\mathbf{p} = (p_1,\cdots,p_d) \qquad (5.6)$$

---

[2] 時間によらないベクトルポテンシャルは，本源的には（座標から自由な形式では），向きづけられた d 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^d$（またはその開部分集合）上の 1 形式 $a=\sum_{j=1}^{d} a_j dx_j$ であり（a_j は超関数），磁場はその外微分（2 形式）$da=\sum_{j<k} F_{jk}\,dx_j \wedge dx_k$ である．(a_j)，(F_{jk}) はそれぞれ，この 1 形式，2 形式の（直交座標系 $(x_1,\cdots,x_d)$ に関する）成分である．この点に関する詳しい論述については，拙著，『物理現象の数学的諸原理』（共立出版，2003）の第 7 章を参照されたい．なお，$d\ge 4$ の場合の "磁場" は，差しあたり，純数学的なものである．

とおく．作用素 p_j は，量子力学の文脈では，自由な量子的粒子の運動量の第 j 成分を表す．この記法を用いると，ポテンシャル V とベクトルポテンシャル $\mathbf{a}$ を外場として有する量子系のハミルトニアンは

$$H_V(\mathbf{a}) := \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 + V = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{d}(p_j - a_j)^2 + V \tag{5.7}$$

によって定義される[3]．作用素の積と和の定義にしたがって，$H_V(\mathbf{a})$ の定義域は

$$D(H_V(\mathbf{a})) = \left\{ f \in \bigcap_{j=1}^{d} D(p_j)\cap D(a_j)\cap D(V) \,\middle|\, p_j f - a_j f \in D(p_j)\cap D(a_j),\ j=1,\cdots,d \right\} \tag{5.8}$$

となる．数学的・数理物理学的研究にとっては，まず，$\mathbf{a}, V$ に関するどのような条件のもとで $H_V(\mathbf{a})$ が（本質的に）自己共役であるかを考察する必要があるが，その前に，それとは独立な $H_V(\mathbf{a})$ の重要な特性の 1 つを見ておく．

5.2 ゲージ対称性

Λ を $\mathbb{R}^d$ 上の連続微分可能な実数値関数とするとき

$$\widetilde{a}_j := a_j + D_j\Lambda, \quad j = 1,\cdots,d \tag{5.9}$$

によって定義されるベクトルポテンシャル

$$\widetilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a}_1,\cdots,\widetilde{a}_d) \tag{5.10}$$

を $\mathbf{a}$ の**ゲージ変換**（より正確には第 2 種のゲージ変換）という．この場合，Λ をその**ゲージ関数**あるいは単に**ゲージ**と呼ぶ．これはいうまでもなく古典電磁気学的な概念であるが，上述のハミルトニアンを考える場合，$H_V(\widetilde{\mathbf{a}})$ と $H_V(\mathbf{a})$ がいかなる関係にあるかを問うのは自然である．この問いに答えるために，ま

[3] この形は，考察下の量子系に対応する古典力学系のハミルトニアン $H_{\mathrm{cl}}:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ が，運動量を $\mathbf{p}_{\mathrm{cl}}\in\mathbb{R}^d$ とすれば，$H_{\mathrm{cl}}(\mathbf{x},\mathbf{p}_{\mathrm{cl}}) = (\mathbf{p}_{\mathrm{cl}}-\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2/2m + V(\mathbf{x})$ で与えられることによる．ただし，粒子の電荷 $q\in\mathbb{R}$ が 1 となる単位系を用いる．q を復活させた場合，$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ は $q\,\mathbf{a}(\mathbf{x})$ となる．

ず，連続な実数値関数であるゲージ関数 Λ は，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ変換 $e^{\pm i\Lambda}$（これらは掛算作用素）を定め，互いに他の逆作用素になっていることに注目する．ユニタリ変換 $e^{\pm i\Lambda}$ を**第1種のゲージ変換**と呼ぶ．そこで，$H_V(\mathbf{a})$ のユニタリ変換 $e^{i\Lambda}$ を考えてみよう．結果から述べれば，次のようになる：

【定理 5.2】 各 $j = 1, \cdots, d$ に対して $D_j\Lambda$ は有界であるとする．このとき，作用素の等式

$$e^{i\Lambda} H_V(\mathbf{a})\, e^{-i\Lambda} = H_V(\widetilde{\mathbf{a}}) \tag{5.11}$$

が成り立つ．

証明 付録 C の命題 C.1 と $e^{i\Lambda} a_j\, e^{-i\Lambda} = a_j$，$e^{i\Lambda} V e^{-i\Lambda} = V$ によって

$$e^{i\Lambda} H_V(\mathbf{a})\, e^{-i\Lambda} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{d} \left(e^{i\Lambda} p_j\, e^{-i\Lambda} - a_j \right)^2 + V.$$

任意の $f \in D(D_j)$ に対して

$$D_j(e^{-i\Lambda} f) = -ie^{-i\Lambda}(D_j\Lambda) \cdot f + e^{-i\Lambda} D_j f$$

が成り立つこと[4]を用いると，$e^{i\Lambda} p_j e^{-i\Lambda} \supset p_j - D_j\Lambda$ が得られる．関数 $D_j\Lambda$ の有界性により，$p_j - D_j\Lambda$ は自己共役である．また，$e^{i\Lambda} p_j e^{-i\Lambda}$ は自己共役である．したがって，作用素の等式

$$e^{i\Lambda} p_j\, e^{-i\Lambda} = p_j - D_j\Lambda \tag{5.12}$$

が成立する．ゆえに，(5.11) が得られる．■

✱注意 5.3 $D_j\Lambda$ $(j = 1, \cdots, d)$ が有界でない場合には，上の証明からわかるように，$e^{i\Lambda} p_j e^{-i\Lambda} \supset p_j - D_j\Lambda$ という関係だけしかわからないので，(5.11) は成立するとは限らない．しかし，$e^{i\Lambda} H_V(\mathbf{a}) e^{-i\Lambda} \supset H_V(\widetilde{\mathbf{a}})$ は成り立つ．したがって，もし，$H_V(\widetilde{\mathbf{a}})$ が本質的に自己共役ならば，$H_V(\mathbf{a})$ もそうであり，作用素の等式 $e^{i\Lambda}\overline{H_V(\mathbf{a})}e^{-i\Lambda} = \overline{H_V(\widetilde{\mathbf{a}})}$ が成立する．

(5.11) は，$H_V(\mathbf{a})$ と $H_V(\widetilde{\mathbf{a}})$ がユニタリ同値であることを語る．したがって，そのスペクトル特性は同じである．特に

$$\sigma(H_V(\widetilde{\mathbf{a}})) = \sigma(H_V(\mathbf{a})), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(H_V(\widetilde{\mathbf{a}})) = \sigma_{\mathrm{p}}(H_V(\mathbf{a})) \tag{5.13}$$

---

[4] 黒田成俊，『関数解析』（共立出版，1980）の定理 6.18 の応用．

が成り立つ．ここで，固有値 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_V(\widetilde{\mathbf{a}}))$ の多重度は $H_V(\mathbf{a})$ の固有値としての多重度と等しい．

いま言及したユニタリ同値性により，$H_V(\mathbf{a})$ を解析するかわりに，問題に応じて，適当なゲージ関数を選ぶことにより，$H_V(\widetilde{\mathbf{a}})$ を解析してもよい．たとえば

$$\operatorname{div}\mathbf{a} := \sum_{j=1}^{d} D_j a_j \quad (\mathbf{a}\text{ の発散}) \tag{5.14}$$

とし，Λ として $\mathbb{R}^d$ 上の 2 回連続微分可能な関数で

$$\Delta\Lambda = -\operatorname{div}\mathbf{a}$$

を満たすものをとれば

$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{a}} = 0 \tag{5.15}$$

が成り立つ．このゲージの取り方を**クーロンゲージ**という．

5.3 反磁性的不等式

$H_V(\mathbf{a})$ の本質的自己共役性が保証された場合に導かれる重要な性質をもう 1 つ見ておこう．

【定理 5.4】 H_V, $H_V(\mathbf{a})$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり，H_V は下に有界であるとする．また，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，H_{V_N}, $H_{V_N}(\mathbf{a})$（V_N は V の下切断；4.8 節を参照）は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であるとする．このとき，$H_V(\mathbf{a})$ も下に有界であり

$$E_0\big(\overline{H_V(\mathbf{a})}\big) \geq E_0\big(\overline{H}_V\big) \tag{5.16}$$

が成り立つ．ただし，下に有界な自己共役作用素 H に対して，$E_0(H)$ は H の最低エネルギーを表す（(3.13) を参照）．

証明 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，$j = 1, \cdots, d$ に対して

$$D_j(f^*f) = [(D_j - ia_j)f]^*f + f^*(D_j - ia_j)f = 2\mathrm{Re}\,[f^*(D_j - ia_j)f].$$

一方

$$D_j(f^*f) = 2|f|D_j|f|$$

を示すのは難しくない．この場合，$|f|$ の一般化された偏導関数 $D_j|f|$ $(j=1,\cdots,d)$ は，ある零集合 $\mathcal{N}$ があって，$F_0 := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N} \mid f(x) = 0\}$ 上では 0 の値をとる関数と同一視できることも同時に示される（証明の概略：任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g_\varepsilon(x) := \sqrt{|f(x)|^2 + \varepsilon}$ とすれば，$D_j g_\varepsilon = D_j(f^*f)/2g_\varepsilon$ である．この式を用いて，任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して成立する式 $\int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(\mathbf{x}) D_j u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^d}(D_j g_\varepsilon)(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ について，$\varepsilon \to 0$ のときの極限を考察すればよい．この考察において，不等式 $|D_j(f^*f)| = |2\mathrm{Re}\,(f^*D_jf)| \le 2|f||D_jf|$ が本質的な役割を演じる）．したがって，$f(\mathbf{x}) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} |(D_j|f|)(\mathbf{x})| &\le \frac{1}{|f(\mathbf{x})|}|\mathrm{Re}\,[f^*(D_j - ia_j)f](\mathbf{x})| \\ &\le |((D_j - ia_j)f)(\mathbf{x})| \end{aligned} \tag{5.17}$$

$\mathbf{x} \in F_0$ ならば，$(D_j|f|)(\mathbf{x}) = 0$ であるから，(5.17) は自明である．そこで，(5.17) の両辺を 2 乗して，$j = 1,\cdots,d$ について和をとり，$\mathbf{x}$ について積分し，その両辺に $\langle f, Vf\rangle$ を加えれば，$|f| \in \bigcap_{j=1}^d D(D_j)$ かつ

$$\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^d \langle D_j|f|, D_j|f|\rangle + \langle f, Vf\rangle \le \langle f, H_V(\mathbf{a})f\rangle$$

が得られる．

さて，まず，V が下に有界な場合を考え，$V_0 := \mathrm{ess.inf}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} V(\mathbf{x})$ とする．$D_q := \bigcap_{j=1}^d D(D_j) \cap D((V-V_0)^{1/2}) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定義域とする準双線形形式

$$q(f,g) := \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^d \big\langle D_jf, D_jg\big\rangle + \big\langle (V-V_0)^{1/2}f, (V-V_0)^{1/2}g\big\rangle, \quad f,g \in D_q$$

を考えると

$$q(f,g) = \big\langle H_0^{1/2}f, H_0^{1/2}g\big\rangle + \big\langle (V-V_0)^{1/2}f, (V-V_0)^{1/2}g\big\rangle.$$

D_q は稠密であり，$H_0^{1/2}$，$(V-V_0)^{1/2}$ は稠密に定義された閉作用素であるので，一般的な定理[5]により，非負の自己共役作用素 H_q で，$D(H_q^{1/2}) = D_q$ か

[5] 拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006)，定理 2.59.

つ $q(f,g) = \left\langle H_q^{1/2} f, H_q^{1/2} g \right\rangle$, $f,g \in D_q$ を満たすものがただ 1 つ存在する．$g \in D(H_V) = D(H_0) \cap D(V)$ ならば $\left\langle f, (H_V - V_0)g \right\rangle = \left\langle H_q^{1/2} f, H_q^{1/2} g \right\rangle$ であるから，$g \in D(H_q)$ かつ $H_q g = (H_V - V_0)g$．すなわち，$H_V - V_0 \subset H_q$．$H_V - V_0$ は本質的に自己共役であるから，これは $\overline{H_V} - V_0 = H_q$ を意味する．したがって，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{d} \langle D_j |f|, D_j |f| \rangle + \langle f, V f \rangle = \left\| (\overline{H}_V - V_0)^{1/2} |f| \right\|^2 + V_0 \|f\|^2.$$

ゆえに

$$\left\| (\overline{H}_V - V_0)^{1/2} |f| \right\|^2 + V_0 \|f\|^2 \le \langle f, H_V(\mathbf{a}) f \rangle .$$

変分原理により，左辺 $\ge E_0(\overline{H}_V - V_0)\|f\|^2 + V_0\|f\|^2 = E_0(\overline{H}_V)\|f\|^2$．ゆえに

$$E_0(\overline{H}_V)\|f\|^2 \le \langle f, H_V(\mathbf{a}) f \rangle . \tag{5.18}$$

これと，変分原理を再び適用することにより，(5.16) が得られる．

次に，V が下に有界でない場合を考える．このとき，(5.18) により

$$E_0(\overline{H}_{V_N}) \le \langle f, H_{V_N}(\mathbf{a}) f \rangle .$$

が成り立つ．明らかに，$\langle f, H_{V_N} f \rangle \ge \langle f, H_V f \rangle$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるので，変分原理により，$E_0(\overline{H}_{V_N}) \ge E_0(\overline{H}_V)$．したがって

$$E_0(\overline{H}_V) \le \langle f, H_{V_N}(\mathbf{a}) f \rangle .$$

そこで，$N \to \infty$ とすれば

$$E_0(\overline{H}_V) \le \langle f, H_V(\mathbf{a}) f \rangle .$$

したがって，再び，変分原理により，(5.16) が得られる． ∎

不等式 (5.16) は**反磁性的不等式** (diamagnetic inequality) と呼ばれるもので，スピン 0 の荷電量子的粒子の最低エネルギーは，磁場が入ったとき下がらないことを語る．

定理 5.4 の仮定をみたす $\mathbf{a}, V$ の基本的な例については，次節における例 5.6 で取り上げる．

5.4 $H_V(\mathbf{a})$ の（本質的）自己共役性

まず，$V=0$ の場合のハミルトニアン

$$H_0(\mathbf{a}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 \tag{5.19}$$

について考えよう．(5.8) より

$$\begin{aligned} &D(H_0(\mathbf{a})) \\ &= \left\{ f \in \bigcap_{j=1}^d D(p_j) \cap D(a_j) \,\middle|\, p_j f - a_j f \in D(p_j) \cap D(a_j),\ j=1,\cdots,d \right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

である．したがって，すべての $f \in D(H_0) \cap D(\mathbf{a}^2) \cap D(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}) \cap D(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})$ は $D(H_0(\mathbf{a}))$ に属し

$$H_0(\mathbf{a})f = H_0 f - \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})f + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 f \tag{5.21}$$

が成り立つ．ただし，H_0 は自由ハミルトニアン—(4.2) を参照—である．

任意の $f \in D(H_0(\mathbf{a}))$ に対して

$$\langle f, H_0(\mathbf{a})f\rangle = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^d \|(p_j - a_j)f\|^2 \ge 0 \tag{5.22}$$

であるから，$H_0(\mathbf{a})$ は非負である．したがって，もし，$D(H_0(\mathbf{a}))$ が稠密ならば，$H_0(\mathbf{a})$ は非負の対称作用素である．

ベクトルポテンシャル $\mathbf{a}$ の各成分 a_j は $\mathbb{R}^d$ 上の連続微分可能な関数としよう：$a_j \in C^1(\mathbb{R}^d)$（$j=1,\cdots,d$；各 $r \in \mathbb{N}$ に対して，$C^r(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の r 回連続微分可能な関数の全体を表す）．このとき，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(H_0(\mathbf{a}))$ であり，すべての $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して (5.21) が成り立つ．特に，$D(H_0(\mathbf{a}))$ は稠密であるから，前段で述べたことによって，$H_0(\mathbf{a})$ は非負の対称作用素である．

ハミルトニアン $H_0(\mathbf{a})$ の自己共役性を保証するための条件を $\mathrm{div}\,\mathbf{a}=0$ の場合とそうとは限らない場合に分けて述べる：

(a.0) 各 $j=1,\cdots,d$ に対して，$a_j \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ かつ $\mathrm{div}\,\mathbf{a}=0$.

(a.1) 各 $j=1,\cdots,d$ に対して，$a_j \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ かつ $D_j a_\ell \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(j,\ell=1,\cdots,d)$.

【定理 5.5】 $D(H_0) \subset D(V)$ かつ実数 $a \in [0,1)$ と $b \geq 0$ が存在して

$$\|Vf\| \leq a\|H_0 f\| + b\|f\|, \quad f \in D(H_0) \tag{5.23}$$

が満たされるとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) 条件 (a.1) のもとで，$D(H_V(\mathbf{a})) = D(H_0)$ であり，作用素の等式

$$H_V(\mathbf{a}) = H_0 - \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}) + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 + V \tag{5.24}$$

$$= H_0 - \frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \frac{i}{2m}\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 + V \tag{5.25}$$

が成り立つ．さらに，$H_V(\mathbf{a})$ は自己共役であり，H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である．特に，$H_V(\mathbf{a})$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である．

(ii) 条件 (a.0) のもとで，$H_V(\mathbf{a})$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり，$D\bigl(\overline{H_V(\mathbf{a})}\bigr) = D(H_0)$ かつ作用素の等式

$$\overline{H_V(\mathbf{a})} = H_0 - \frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 + V \tag{5.26}$$

が成り立つ．さらに，$\overline{H_V(\mathbf{a})}$ は H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である．

証明 (i) $f \in D(H_0)$ とすれば，$f \in D(p_j)$ かつ $p_j f \in D(p_j)$ $(j = 1, \cdots, d)$．a_j の有界性は $D(a_j) = L^2(\mathbb{R}^d)$ を意味するので，$f \in D(p_j) \cap D(a_j)$ が成り立つ．さらに，任意の $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\langle a_j f, p_j g\rangle = \langle f, a_j p_j g\rangle = \langle f, p_j(a_j g)\rangle + \langle f, i(D_j a_j)g\rangle$$

a_j と $D_j a_j$ は有界であるから $\langle a_j f, p_j g\rangle = \langle a_j p_j f - i(D_j a_j)f, g\rangle$ となる．$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は p_j の芯であるから，これは，$a_j f \in D(p_j)$ かつ

$$p_j(a_j f) = a_j p_j f - i(D_j a_j)f \tag{5.27}$$

を意味する．したがって，$f \in D(H_0(\mathbf{a}))$．ゆえに，$D(H_0) \subset D(H_0(\mathbf{a}))$．他方，条件 (a.1) のもとで，逆の包含関係 $D(H_0(\mathbf{a})) \subset D(H_0)$ を示すのは容易である．ゆえに，$D(H_0) = D(H_0(\mathbf{a}))$ であり，作用素の等式 (5.24), (5.25) が成立する．

任意の $f \in D(H_0)$ に対して

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}f\| &\le \sum_{j=1}^{d}\|a_j\|_\infty\|p_jf\| \\ &\le C\left(\sum_{j=1}^{d}\|p_jf\|^2\right)^{1/2} = C\,\langle f, -\Delta f\rangle^{1/2}\end{aligned}$$

ただし

$$C := \left(\sum_{j=1}^{d}\|a_j\|_\infty^2\right)^{1/2}$$

シュヴァルツの不等式と初等的な不等式

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \quad a>0,\ b>0,\ \varepsilon>0$$

を用いると，$\varepsilon > 0$ を任意の正数として

$$\begin{aligned}\langle f, -\Delta f\rangle^{1/2} &\le \varepsilon\|-\Delta f\| + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\| \\ &\le (2m)\varepsilon\|H_0f\| + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|.\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$\left\|\frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}f\right\| \le 2C\varepsilon\|H_0f\| + \frac{C}{4m\varepsilon}\|f\|.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\left\|\left(-\frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2m}\operatorname{div}\mathbf{a} + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 + V\right)f\right\| \\ &\quad\le (2C\varepsilon + a)\|H_0f\| + \left(\frac{C}{4m\varepsilon} + \frac{1}{2m}\|\operatorname{div}\mathbf{a}\|_\infty + \frac{C^2}{2m} + b\right)\|f\|.\end{aligned}$$

$2C\varepsilon + a < 1$ となる ε をとれるから，(5.25) と加藤–レリッヒの定理（付録 C，定理 C.15）により，$H_V(\mathbf{a})$ は自己共役であり，H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である．

(ii) (i) の議論と同様にして，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して $f \in D(H_V(\mathbf{a}))$ であり

$$H_V(\mathbf{a})f = H_V(\mathbf{a})'f, \quad H_V(\mathbf{a})' := H_0 - \frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 + V$$

が成り立つ．(i) の証明により，$D(H_V(\mathbf{a})') = D(H_0)$ であり，$H_V(\mathbf{a})'$ は自己共役かつ $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である．したがって，$H_V(\mathbf{a})$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり，$\overline{H_V(\mathbf{a})} = H_V(\mathbf{a})'$ が成立する． ∎

■例 5.6 V が例 4.21 のクーロン型ポテンシャル V_{C} の場合，定理 5.5 の V に関する仮定は満たされる（拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の (2.47) を参照).

$\lambda < 0$ の場合, $V = V_{\mathrm{C}}$ は下に有界でないが, 上に有界であるので V_N は有界になる．したがって，条件 (a.0) または (a.1) のもとで，すべての N に対して，$H_{V_N}, H_{V_N}(\mathbf{a})$ は本質的に自己共役であり，下に有界である．したがって，この例は定理 5.4 の仮定を満たす．ゆえに，いまの場合，反磁性的不等式が成立する．

この節を終えるにあたって，V が下に有界な場合の $H_V(\mathbf{a}) \mid C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の本質的自己共役性に関する最良の結果を紹介しておく：

【定理 5.7】 （ラインフェルダー (Leinfelder)・ジマーダー (Simader)[6]) $V \geq 0$, a_j^2 $(j = 1, \cdots, d)$, $\operatorname{div} \mathbf{a} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，$H_V(\mathbf{a})$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である．

$H_V(\mathbf{a})$ の自己共役拡大については次の結果が知られている：$a_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, d)$，$V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ かつ V が下に有界ならば，下に有界な閉準双線形形式

$$q_{\mathbf{a},V}(f,g) := \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{d} \left\langle \overline{(p_j - a_j)} f, \overline{(p_j - a_j)} g \right\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* V(x) g(x)\, dx,$$

$$f, g \in \bigcap_{j=1}^{d} D(\overline{p_j - a_j}) \cap D(|V|^{1/2})$$

に同伴する自己共役作用素は $H_V(\mathbf{a})$ の自己共役拡大である[7]．

5.5 発見法的議論

容易に見てとれるように，条件 (a.1) のもとで，$\mathbf{a} \neq 0$ ならば，$H_0(\mathbf{a})$ に含まれる摂動項 $\mathbf{a}^2/2m - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p})/2m$ は掛算作用素ではなく，上にも下に

[6] H. Leinfelder and C. Simader, Schrödinger operators with singular magnetic potentials, *Math. Z.*, **176** (1981), 1–19.
[7] 詳しくは，拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の例 2.14(p.104) を参照.

も有界ではない．したがって，$H_0(\mathbf{a})$ が生成する熱半群 $\left\{e^{-tH_0(\mathbf{a})}\right\}_{t\ge0}$ に対して，トロッター–加藤の積公式を適用できない．ゆえに，この場合，第3章の方法では，$e^{-tH_0(\mathbf{a})}$ に関する汎関数積分表示への道は閉ざされているように見える．だが，ここであきらめないで，第3章における方法の本質をよく検討してみよう．そこでは，最終的に何が重要な鍵であったかといえば，$e^{-t\bar{H}_V}$ がある積分作用素——当該の場合は，$e^{-tH_0/n}e^{-tV/n}$——の n 乗の強極限で表されるということにほかならない．トロッター–加藤の積公式は，あくまでも，この種の表示を与えうる原理の1つであり，ほかに同種の表示を生み出す数学的構造がないことを意味するものではない．そこで，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の積分作用素 Q_t $(t>0)$ で

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} Q_{t/n}^n = e^{-tH_0(\mathbf{a})}, \quad t>0$$

を満たすものを見つけることを考える．この場合，発見法的には

$$Q_{t/n}f \approx e^{-tH_0(\mathbf{a})/n}f \quad (n\to\infty), \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{5.28}$$

を要請するのは自然である[8]．すなわち，これは，$s>0$ が十分小さいところでは

$$Q_s f \approx e^{-sH_0(\mathbf{a})}f$$

が成立することを意味し，したがって，特に

$$\frac{d}{ds}Q_s f \approx -H_0(\mathbf{a})\,e^{-sH_0(\mathbf{a})}f \approx -H_0(\mathbf{a})f, \quad s>0,\ s\approx 0, \tag{5.29}$$

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{Q_s f - f}{s} = -H_0(\mathbf{a})f, \quad f\in D(H_0(\mathbf{a})) \tag{5.30}$$

という条件——すなわち，「$Q_s f$ は $s=0$ で強微分可能であり，その微分が $-H_0(\mathbf{a})f$ に等しい」という条件——を課することになる．

Q_t の積分核を $K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d)$ としよう：

$$(Q_t f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{5.31}$$

Q_t は自己共役であるべきであるから

$$K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})^* = K_t(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d \tag{5.32}$$

---

[8] 「$A\approx B$」は「A と B が“近似的に”等しい」ことを表す記法である（近似の意味は，対象ごとに異なりうる）．

が要請される．$e^{-sH_0(\mathbf{a})}$ は e^{-sH_0} の摂動として得られるから，積分核については，$K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})=P_t(\mathbf{x},\mathbf{y})\,e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ という形を想定するのは自然であろう（$w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は決定されるべき関数）．この場合，条件 (5.32) は

$$w(\mathbf{x},\mathbf{y})^*=w(\mathbf{y},\mathbf{x}) \tag{5.33}$$

を意味する．関数の $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の形を見出すために，まず，直接計算により

$$\frac{dP_s(\mathbf{x},\mathbf{y})}{ds}=\left(-\frac{d}{2s}+\frac{m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2s^2}\right)P_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{5.34}$$

$$=\frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{x}}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{y}}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{5.35}$$

が成り立つことに注意する．w は 2 回連続微分可能であるとしよう．このとき，任意の $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{ds}Q_sf\right)(\mathbf{x})&=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2m}\left(\Delta_{\mathbf{y}}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\\&=\frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}^d}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}}\left(e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}f(\mathbf{y})\right)d\mathbf{y}.\end{aligned}$$

ここで，部分積分を行った．そこで，任意の $u,v\in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成立する式

$$\Delta(uv)=(\Delta u)v+2\nabla u\cdot\nabla v+u(\Delta v)\quad(\nabla u:=(D_1u,\cdots,D_du)) \tag{5.36}$$

を使えば

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{ds}Q_sf\right)(\mathbf{x})=\frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}^d}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\big\{&(\Delta_{\mathbf{y}}w(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\nabla_{\mathbf{y}}w(\mathbf{x},\mathbf{y}))^2)f(\mathbf{y})e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}\\&+2\nabla_{\mathbf{y}}w(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\nabla f)(\mathbf{y})e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}+e^{w(\mathbf{x},\mathbf{y})}(\Delta f)(\mathbf{y})\big\}d\mathbf{y}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

となる．右辺において $s\downarrow 0$ の極限をとるために，次の事実に注意する：

【補題 5.8】 g は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 g で，$\mathbf{x}$ に依存しうる定数 $C(\mathbf{x})>0$ と定数 $\alpha\geq 0$ があって

$$|g(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leq C(\mathbf{x})\,e^{\alpha|\mathbf{y}|},\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d \tag{5.38}$$

を満たすものとする．このとき

$$\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})g(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=g(\mathbf{x},\mathbf{x}),\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{5.39}$$

証明　積分 $\int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})|g(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}$ が存在することは (5.38) から容易にわかる．変数変換 $\mathbf{z}=\sqrt{m}(\mathbf{y}-\mathbf{x})/\sqrt{s}$ を行うと

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x},\mathbf{y})g(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{z}^2/2}g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z}/\sqrt{m})\,d\mathbf{z}.$$

$\lim_{s\to 0} e^{-\mathbf{z}^2/2}g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z}/\sqrt{m}) = e^{-\mathbf{z}^2/2}g(\mathbf{x},\mathbf{x})$ であり

$$\begin{aligned}|e^{-\mathbf{z}^2/2}g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z}/\sqrt{m})| &\le e^{-\mathbf{z}^2/2}C(\mathbf{x})\,e^{\alpha|\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z}/\sqrt{m}|}\\ &\le C(\mathbf{x})\,e^{\alpha|\mathbf{x}|}\,e^{-(1/2)\mathbf{z}^2+\alpha|\mathbf{z}|/\sqrt{m}} \quad (0<s<1).\end{aligned}$$

最右辺は $s\in(0,1)$ によらない（$d\mathbf{z}$ について）可積分な関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，(5.39) が得られる． ∎

この補題と (5.37) によって

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\left(\frac{d}{ds}Q_s f\right)(\mathbf{x}) = e^{w(\mathbf{x},\mathbf{x})}\Big\{&\frac{1}{2m}\Delta f(\mathbf{x}) + \frac{1}{m}(\nabla_{\mathbf{y}}w)(\mathbf{x},\mathbf{x})\\ &\cdot\nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2m}(\nabla_{\mathbf{y}}w)(\mathbf{x},\mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2m}(\Delta_{\mathbf{y}}w)(\mathbf{x},\mathbf{x})f(\mathbf{x})\Big\}\end{aligned}$$

を得る．したがって，もし

$$w(\mathbf{x},\mathbf{x})=0,\quad (\nabla_{\mathbf{y}}w)(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -i\mathbf{a}(\mathbf{x}),\quad -i\sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x}) = (\Delta_{\mathbf{y}}w)(\mathbf{x},\mathbf{x}) \tag{5.40}$$

ならば，(5.29) が各点 $\mathbf{x}$ ごとに満たされる（ただし，強収束の意味で満たされるかどうかはいまの段階では不明である）．最初の 2 つの式から

$$w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{i}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{x})+\mathbf{a}(\mathbf{y}))\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.41}$$

という形が仮設されうる．この場合，(5.40) の第 3 式および条件 (5.33) も満たされることがわかる．よって，この w を求める関数の候補の 1 つとすることができる．この関数が実際にわれわれの目的にかなったものであることは次の節で証明する．

5.6　極限定理

前節の発見法的議論に基づいて，改めて，$t>0$ に対して，関数 K_t を

$$K_t(\mathbf{x},\mathbf{y}) := P_t(\mathbf{x},\mathbf{y})\, e^{i[\mathbf{a}(\mathbf{x})+\mathbf{a}(\mathbf{y})]\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})/2}, \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d \tag{5.42}$$

によって定め，$Q_t f$ $(f\in L^2(\mathbb{R}^d))$ を (5.31) によって定義する．この定義が実際に意味をもつことは，容易にわかる不等式

$$|K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le P_t(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{5.43}$$

によって，任意の $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ は存在し

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right| \le \left(e^{-tH_0}|f|\right)(\mathbf{x})$$

が成り立つことによる．したがって，$Q_t f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ であり

$$|(Q_t f)(\mathbf{x})| \le \left(e^{-tH_0}|f|\right)(\mathbf{x}), \tag{5.44}$$

$$\|Q_t f\| \le \|e^{-tH_0}|f|\| \le \|f\|, \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{5.45}$$

が成立する．ゆえに，Q_t は縮小作用素である．さらに，$K_t(\mathbf{x},\mathbf{y})^* = K_t(\mathbf{y},\mathbf{x})$ であるから Q_t は自己共役である．まとめれば

$$\|Q_t\| \le 1, \quad Q_t^* = Q_t, \quad \forall t>0 \tag{5.46}$$

ということである．便宜上

$$Q_0 := I \tag{5.47}$$

とする．次の命題は以後の展開の鍵となる事実の 1 つである：

【命題 5.9】 条件 (a.1) のもとで，任意の $f\in D(H_0)$ に対して

$$\lim_{s\to 0}\frac{Q_s f - f}{s} = -H_0(\mathbf{a})f \tag{5.48}$$

が成り立つ．

この命題を証明するために，補題を 1 つ準備する．各 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$\mathcal{F}_d\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}\mathcal{F}_d^{-1} = \sum_{j=1}^d z_j M_{k_j} \quad (M_{k_j} \text{ は } k_j \text{ による掛算作用素}) \tag{5.49}$$

であり（$\mathcal{F}_d$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換），右辺は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であるから，$\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である．さらに

$$\mathcal{F}_d\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}\mathcal{F}_d^{-1} = M_{\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}} \tag{5.50}$$

となることがわかる（$\sum_{j=1}^d z_j M_{k_j} \subset M_{\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}}$ に注意）．これを用いると，任意の $t\in\mathbb{R}$ と $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left(e^{it\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}}f\right)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x} \tag{5.51}$$

となる．明らかに，対応: $t\mapsto e^{it\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}}f$ は強連続である．したがって，強リーマン積分

$$\int_0^t e^{is\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}}f\,ds \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

が定義される．

【補題 5.10】　任意の $f\in\bigcap_{j=1}^d D(p_j)$ に対して

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d z_j\left(\int_0^t e^{is\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}}D_jf\,ds\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x}. \tag{5.52}$$

さらに，$L^2(\mathbb{R}^d)$ の収束の意味で

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\cdot+t\mathbf{z})-f}{t} = \sum_{j=1}^d z_jD_jf \tag{5.53}$$

証明　(5.52) を示すには，両辺の L^2 の意味でのフーリエ変換が一致することを示せばよい．左辺の関数を F，右辺の関数を G とすれば

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \left(e^{it\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}}-1\right)\hat{f}(\mathbf{k}), \quad \text{a.e.}\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d.$$

他方，ds に関する積分は強積分であるから，任意の $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\langle g,\hat{G}\rangle = \int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{k})^*e^{is\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}}i\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}\hat{f}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\right)ds.$$

ここで

$$\left|g(\mathbf{k})^*\,e^{is\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}}k_j\hat{f}(\mathbf{k})\right| = |g(\mathbf{k})||k_j|\left|\hat{f}(\mathbf{k})\right|$$

は $ds \otimes dk$ について可積分であるから，フビニの定理によって，積分順序を交換できる．その結果

$$\langle g, \hat{G} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{k})^* \big(e^{it\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}} - 1\big) \hat{f}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$$

が得られる． したがって，$\hat{G}(\mathbf{k}) = \big(e^{it\mathbf{z}\cdot\mathbf{k}} - 1\big)\hat{f}(\mathbf{k}) = \hat{F}(\mathbf{k})$．ゆえに (5.52) が成立する．

(5.53) は，自己共役作用素が生成するユニタリ群の生成子に関する一般的事実による．すなわち

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{it\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}} f - f}{t} = i\mathbf{z}\cdot\mathbf{p} f, \quad f \in D(\mathbf{z}\cdot\mathbf{p})$$

から導かれる． ∎

命題 5.9 の証明

$f \in D(H_0)$ を任意に固定し

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2}[\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{y})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

とおく．$s > 0$ として，次のような恒等変形を行う：

$$\begin{aligned}
&\frac{(Q_s f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{s} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{e^{iu(\mathbf{x},\mathbf{y})} - 1}{s} \right) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \frac{1}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - f(\mathbf{x}) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{e^{iu(\mathbf{x},\mathbf{y})} - 1}{s} \right) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \frac{(e^{-sH_0} f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{s}.
\end{aligned}$$

熱半群の理論から

$$\lim_{s\to 0} \frac{e^{-sH_0} f - f}{s} = -H_0 f \quad (\text{強収束})$$

したがって

$$F_s(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{e^{iu(\mathbf{x},\mathbf{y})} - 1}{s} \right) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

とするとき

$$\lim_{s\to 0} F_s = \frac{1}{2m}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{a}) f - \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 f \quad (L^2\ \text{収束}) \tag{5.54}$$

を示せばよい．変数変換 $\mathbf{z} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\sqrt{s}$ を行うと

$$F_s(\mathbf{x}) = C \int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2} \left(\frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{s} \right) f(\mathbf{x} + \sqrt{s}\mathbf{z})\, d\mathbf{z}.$$

ただし，$C := m^{d/2}/(2\pi)^{d/2}$, $v_s(\mathbf{x}, \mathbf{z}) := [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{x} + \sqrt{s}\mathbf{z})] \cdot \mathbf{z}/2$．この式をさらに次のように変形する：

$$\begin{aligned}
&F_s = F_s^{(1)} + F_s^{(2)}, \\
&F_s^{(1)}(\mathbf{x}) := C \int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2} \left(\frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{\sqrt{s}} \right) \left(\frac{f(\mathbf{x} + \sqrt{s}\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{\sqrt{s}} \right) d\mathbf{z} \\
&F_s^{(2)}(\mathbf{x}) := C f(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2} \left(\frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{s} \right) d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

$F_s^{(1)}$ と $F_s^{(2)}$ を別々に評価する．

$$G_{s,\mathbf{z}}(\mathbf{x}) := \left(\frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{\sqrt{s}} \right) \left(\frac{f(\mathbf{x} + \sqrt{s}\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{\sqrt{s}} \right)$$

とおけば，対応：$\mathbf{z} \mapsto G_{s,\mathbf{z}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 値可測関数である．初等的な不等式

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.55}$$

によって

$$\left| \frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{\sqrt{s}} \right| \leq |v_s(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \leq c_0 |\mathbf{z}|, \quad c_0 := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{a}(\mathbf{x})|.$$

また

$$\lim_{s \to 0} \frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{\sqrt{s}} = -i\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}.$$

これらの事実と補題 5.10 によって

$$\lim_{s \to 0} G_{s,\mathbf{z}} = -i\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \sum_{j=1}^{d} (D_j f) z_j \quad (L^2 \text{ 収束}).$$

が示される．したがって

$$\left\| F_s^{(1)} - C \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, e^{-m|\mathbf{z}|^2/2} (-i) \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \sum_{j=1}^{d} (D_j f) z_j \right\|$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}\left\|G_{s,\mathbf{z}} - (-i)\mathbf{a}\cdot\mathbf{z}\sum_{j=1}^d (D_j f)z_j\right\| d\mathbf{z}. \tag{5.56}$$

$G_{s,\mathbf{z}}$ の定義から

$$\|G_{s,\mathbf{z}}\| \le c_0|\mathbf{z}|\frac{\|e^{i\sqrt{s}\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}}f - f\|}{\sqrt{s}}$$

付録 C の (C.9) を応用することにより

$$\|G_{s,\mathbf{z}}\| \le c_0|\mathbf{z}|\|\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}}f\|.$$

$e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}|\mathbf{z}|^n$ ($n\in\mathbb{N}$) は可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，(5.56) の右辺は，$s\to 0$ のとき，0 に収束する．ゆえに

$$\lim_{s\to 0} F_s^{(1)} = C\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}(-i)\mathbf{a}\cdot\mathbf{z}\sum_{j=1}^d (D_j f)z_j = \frac{1}{m}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}f \quad (L^2\text{ 収束})$$

が成立する．ここで，公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\mathbf{z}|^2/2} z_j z_\ell\, d\mathbf{z} = (2\pi)^{d/2}\delta_{j\ell}, \quad j,\ell = 1,\cdots,d \tag{5.57}$$

を用いた．

次に $F_s^{(2)}$ を評価しよう．指数関数の展開式から

$$\frac{e^{-i\sqrt{s}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})} - 1}{s} = \frac{(-i)}{\sqrt{s}}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \frac{(-i)^2}{2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^2 + \sum_{n=3}^\infty \frac{(-i)^n}{n!}s^{(n-2)/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^n.$$

である．

$$\left|\sum_{n=1}^N \frac{(-i)^n}{n!}s^{(n-2)/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^n\right| \le \frac{1}{s}(e^{\sqrt{s}c_0|\mathbf{z}|} - 1)$$

であり，（右辺）$\times e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}$ は，N によらない可積分関数であるから，ルベーグの優収束定理により

$$F_s^{(2)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\left\{\frac{C}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}(-i)v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})\, d\mathbf{z}\right.$$
$$- \frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^2\, d\mathbf{z}$$

$$+\sqrt{s}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{C(-i)^n}{n!}s^{(n-3)/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^n\,d\mathbf{z}\biggr\}.$$

$\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}(\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{z})\,d\mathbf{z}=0$ であるから $(v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})=(v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})-\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{z})+\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{z}$ と変形して）

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})\,d\mathbf{z}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}\frac{[\mathbf{a}(\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z})-\mathbf{a}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{z}}{2\sqrt{s}}\,d\mathbf{z}$$

と表される．微分積分学の基本定理により

$$\frac{[\mathbf{a}(\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z})-\mathbf{a}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{z}}{\sqrt{s}}=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{\sqrt{s}}\sum_{j,\ell=1}^{d}D_ja_\ell(\mathbf{x}+t\mathbf{z})z_jz_\ell\,dt$$

したがって

$$\left|e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}\frac{[\mathbf{a}(\mathbf{x}+\sqrt{s}\mathbf{z})-\mathbf{a}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{z}}{2\sqrt{s}}\right|\le\frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{d}\|D_ja_\ell\|_\infty\,e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}|z_j||z_\ell|.$$

右辺は s によらない可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to0}\frac{C}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}(-i)v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\\&\quad=\frac{(-i)}{2}\sum_{j,\ell=1}^{d}D_ja_\ell(\mathbf{x})C\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}z_jz_\ell\,d\mathbf{z}=\frac{(-i)}{2m}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

同様にして

$$\lim_{s\to0}\frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m|\mathbf{z}|^2/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^2\,d\mathbf{z}=\frac{1}{2m}\mathbf{a}(\mathbf{x})^2$$

$$\lim_{s\to0}\sqrt{s}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{C(-i)^n}{n!}s^{(n-3)/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-m||\mathbf{z}|^2/2}v_s(\mathbf{x},\mathbf{z})^n\,d\mathbf{z}=0$$

を示すことができる．よって

$$\lim_{s\to0}F_s^{(2)}(\mathbf{x})=\left(\frac{(-i)}{2m}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{x})-\frac{1}{2m}\mathbf{a}(\mathbf{x})^2\right)f(\mathbf{x})$$

となる．この事実と上の議論から含意される評価式 ($0<s<s_0$（定数）とする)

$$|F_s^{(2)}(\mathbf{x})|\le C_1|f(\mathbf{x})|\quad(C_1\ \text{は定数})$$

から（ルベーグの優収束定理を用いて）

$$\lim_{s\to 0} F_s^{(2)} = \frac{(-i)}{2m}(\operatorname{div}\mathbf{a})f - \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 f \quad (L^2 \text{ 収束})$$

が結論される．

以上によって，(5.54) が証明されたことになる． ∎

✱注意 5.11 上述の証明からわかるように，クーロンゲージの場合，すなわち，$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ の場合には，条件 (a.0) のもとで，K_t のかわりに

$$K_t^0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P_t(\mathbf{x},\mathbf{y})\, e^{i\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

をとり，K_t^0 を積分核とする積分作用素を Q_t^0 とすれば，(5.48) において，Q_t を Q_t^0 で，$H_0(\mathbf{a})$ を $\overline{H_0(\mathbf{a})}$ で置き換えた式が成立する（証明はより簡単である）．

【補題 5.12】 条件 (a.1) のもとで，任意の $f \in D(H_0)$ と $t \geq 0$ に対して，$e^{-tH_0(\mathbf{a})}f \in D(H_0)$ であり，$H_0\, e^{-tH_0(\mathbf{a})}f$ は t について強連続である．

証明 付録 C の定理 C.16 を $A = H_0$, $B = -(1/2m)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}^2/2m$ として応用すればよい． ∎

【定理 5.13】 仮定 (a.1) が満たされるとする．このとき，すべての $t > 0$ に対して

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} Q_{t/n}^n = e^{-tH_0(\mathbf{a})}. \tag{5.58}$$

証明 まず，$f \in D(H_0)$ の場合を考える．$S_t := e^{-tH_0(\mathbf{a})}$, $t > 0$ とすれば

$$\lim_{t\to 0} \frac{S_t f - f}{t} = -H_0(\mathbf{a})f$$

であるから，これと (5.48) によって

$$\lim_{n\to\infty} \|n(S_{t/n} - Q_{t/n})f\| = 0 \tag{5.59}$$

が成り立つ．

$D(H_0)$ は，$\|f\|_{D(H_0)} := \sqrt{\|H_0 f\|^2 + \|f\|^2}$, $f \in D(H_0)$ をノルムとして，バナッハ空間になる．このバナッハ空間を $\hat{D}(H_0)$ で表す．$\|f\| \leq \|f\|_{D(H_0)}$ であるから，$n(S_{t/n} - Q_{t/n})$ は $\hat{D}(H_0)$ から $\mathcal{H}$ への有界線形作用素である．した

がって，付録Cの命題C.3の応用により，(5.59) における収束は，$\hat{D}(H_0)$ の任意のコンパクト集合上で一様である．

任意の $t>0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_t - Q_{t/n}^n = S_{t/n}^n - Q_{t/n}^n$$

と書ける．そこで，付録Cの補題C.17を用いると

$$\begin{aligned} S_t - Q_{t/n}^n &= \sum_{j=0}^{n-1} Q_{t/n}^j (S_{t/n} - Q_{t/n}) S_{t/n}^{n-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} Q_{t/n}^j (S_{t/n} - Q_{t/n}) S_{t(n-j-1)/n} \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\|(S_t - Q_{t/n}^n) f\| \le \sup_{0 \le s \le t} \|n(S_{t/n} - Q_{t/n}) S_s f\|.$$

写像 $F : [0,t] \to \hat{D}(H_0)$ を $F(s) := S_s f$ によって定義する．このとき，補題5.12によって，F は連続である．$[0,t]$ はコンパクト集合であるから，$\{F(s) \mid s \in [0,t]\}$ もコンパクト集合である．したがって，前段で述べたことと合わせれば

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \le s \le t} \|n(S_{t/n} - Q_{t/n}) S_s f\| = 0$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} Q_{t/n}^n f = S_t f.$$

$\|Q_{t/n}^n\| \le 1$ であるから，これは，すべての $f \in \mathcal{H}$ に拡張される．　■

✱ 注意 5.14　条件 (a.0) のもとで，(5.58) において，Q_t を Q_t^0 で，$H_0(\mathbf{a})$ を $\overline{H_0(\mathbf{a})}$ で置き換えた式が成立する．

5.7　比較定理

定理5.13から帰結される基本的な結果のいくつかを見ておこう．

【定理 5.15】　条件 (a.0) または (a.1) のもとで，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t > 0$ に対して

$$\left|\left(e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a})}}f\right)(\mathbf{x})\right| \le \left(e^{-tH_0}|f|\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \tag{5.60}$$

が成り立つ．

証明　条件 (a.1) が成立する場合についてのみ証明する（条件 (a.0) のもとでの証明も，注意 5.14 により，まったく同様になされる）．(5.58) によって，部分列 $\{n_k\}_k$ があって

$$\lim_{k\to\infty}(Q_{t/n_k}^{n_k}f)(\mathbf{x}) = \left(e^{-tH_0(\mathbf{a})}f\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ．したがって，a.e.$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\left|\left(e^{-tH_0(\mathbf{a})}f\right)(\mathbf{x})\right| = \lim_{k\to\infty}|(Q_{t/n_k}^{n_k}f)(\mathbf{x})|.$$

一方，(5.44) によって，a.e.$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
&|(Q_{t/n}^{n}f)(\mathbf{x})| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}_1 P_{t/n}(\mathbf{x},\mathbf{x}_1)(|Q_{t/n}^{n-1}f|)(\mathbf{x}_1) \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}_2 \cdots \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}_n P_{t/n}(\mathbf{x},\mathbf{x}_1)P_{t/n}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \\
&\qquad \times \cdots P_{t/n}(\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)|f(\mathbf{x}_n)| \\
&= \left(e^{-tH_0}|f|\right)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

したがって，(5.60) が成立する．　■

次にポテンシャル V が入った場合のハミルトニアン $H_V(\mathbf{a})$ について，(5.60) がどのように修正されるかを見よう．

【定理 5.16】　ベクトルポテンシャル $\mathbf{a}$ は (a.0) または (a.1) を満たすとする．さらに，V はほとんどいたるところ有限であり，H_V と $H_V(\mathbf{a})$ は本質的に自己共役であるとする．また，V_N を V の下切断とし，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，H_{V_N} と $H_{V_N}(\mathbf{a})$ は本質的に自己共役であると仮定する．このとき，すべての $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t > 0$ に対して

$$\left|\left(e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}f\right)(\mathbf{x})\right| \le \left(e^{-t\overline{H}_V}|f|\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.61}$$

証明　まず，V が下に有界な場合を考える．仮定により，トロッター–加藤の積公式

$$e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}f = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a})}/n}\,e^{-tV/n}\right)^n f,$$
$$e^{-t\overline{H}_V}f = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-tH_0/n}\,e^{-tV/n}\right)^n f$$

が成り立つ．したがって，部分列 $\{n_k\}_k$ があって

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a})/nk}}\,e^{-tV/n_k}\right)^{n_k}f\right)(\mathbf{x}) = \left(e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}f\right)(\mathbf{x}),$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(e^{-tH_0/n_k}\,e^{-tV/n_k}\right)^{n_k}f\right)(\mathbf{x}) = \left(e^{-t\overline{H}_V}f\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$$

となる．ゆえに，(5.60) を繰り返し使うことにより，a.e.$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|\left(e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}f\right)(\mathbf{x})\right| \\
&\quad\le \limsup_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}d\mathbf{x}_1\int_{\mathbb{R}^d}d\mathbf{x}_2\cdots\int_{\mathbb{R}^d}d\mathbf{x}_{n_k}P_{t/n_k}(\mathbf{x},\mathbf{x}_1)\,e^{-tV(\mathbf{x}_1)/n_k} \\
&\qquad\times P_{t/n_k}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)e^{-tV(\mathbf{x}_2)/n_k}\cdots P_{t/n_k}(\mathbf{x}_{n_k-1},\mathbf{x}_{n_k})\,e^{-tV(\mathbf{x}_{n_k})/n_k}|f(\mathbf{x}_{n_k})| \\
&\quad= \limsup_{k\to\infty}\left(\left(e^{-tH_0/n_k}\,e^{-tV/n_k}\right)^{n_k}|f|\right)(\mathbf{x}) \\
&\quad= \left(e^{-t\overline{H}_V}|f|\right)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

したがって，(5.61) が成立する．

次に V が下に有界でない場合を考える．前半の結果により，すべての $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t>0$ に対して

$$\left|\left(e^{-t\overline{H_{V_N}(\mathbf{a})}}f\right)(\mathbf{x})\right| \le \left(e^{-t\overline{H}_{V_N}}|f|\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{5.62}$$

他方

$$\lim_{N\to\infty}V_Nf = Vf, \quad f\in D(V).$$

したがって

$$\lim_{N\to\infty}H_{V_N}(\mathbf{a})f = H_V(\mathbf{a})f, \quad \lim_{N\to\infty}H_{V_N}f = H_Vf,$$
$$f\in D(H_V)\cap D(H_V(\mathbf{a})).$$

条件 (a.1) または (a.0) から，$D(H_V)\cap D(H_V(\mathbf{a})) = D(H_V)$ が成立し，仮定

(H_V の本質的自己共役性) により，$D(H_V)$ は稠密である．したがって，付録 C の定理 C.20 によって

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} e^{-t\overline{H}_{V_N}} = e^{-t\overline{H}_V}, \quad \text{s-}\lim_{N\to\infty} e^{-t\overline{H_{V_N}(\mathbf{a})}} = e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}, \quad t > 0.$$

ゆえに，上述の議論と同様にして，(5.62) において，N のかわりに適当な部分列 N_k をとり，$k \to \infty$ とすることにより，(5.61) が得られる． ∎

次の定理は反磁性不等式 (5.16) の別証明を与える：

【定理 5.17】 定理 5.16 の仮定のもとで

$$E_0\big(\overline{H_V(\mathbf{a})}\big) \geq E_0\big(\overline{H}_V\big). \tag{5.63}$$

証明 (5.62) は，任意の $t > 0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\big\|e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}} f\big\| \leq \big\|e^{-t\overline{H}_V}|f|\big\| \leq \big\|e^{-t\overline{H}_V}\big\|\|f\|$$

を意味する．したがって

$$\big\|e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}\big\| \leq \big\|e^{-t\overline{H}_V}\big\|, \quad t > 0.$$

この不等式と命題 3.1 の (i) によって

$$e^{-tE_0(\overline{H_V(\mathbf{a})})} \leq e^{-tE_0(\overline{H}_V)}, \quad t > 0.$$

ゆえに (5.63) が成立する． ∎

次の定理は磁場が入った場合の分配関数と磁場がない場合の分配関数に関する比較定理であり，反磁性的不等式の量子統計力学版の 1 つと見ることができ，たいへん興味深い．

【定理 5.18】 定理 5.16 の仮定に加えて，ある $\beta > 0$ に対して $e^{-\beta\overline{H}_V/2}$ はヒルベルト−シュミット型作用素であるとする．このとき，$e^{-\beta\overline{H_V(\mathbf{a})}}$ はトレース型であり

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta\overline{H_V(\mathbf{a})}} \leq \operatorname{Tr} e^{-\beta\overline{H}_V} \tag{5.64}$$

が成り立つ．

証明　(5.61) と仮定により，付録 C の定理 C.30 を $A = e^{-\beta \overline{H_V(\mathbf{a})}/2}$, $B = e^{-\beta \overline{H}_V/2}$ として応用できる．この場合，$A^*A = e^{-\beta \overline{H_V(\mathbf{a})}}$, $B^*B = e^{-\beta \overline{H}_V}$ であるから，(5.64) が得られる．■

✱ 注意 5.19　補題 4.44 および (4.106) を用いることによって，$V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ であり，かつ $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-tV(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} < \infty$ ならば，任意の $t > 0$ に対して，$e^{-t\overline{H}_V}$ はヒルベルト–シュミット型であることがわかる．

5.8　汎関数積分表示

定理 5.13 は $\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\rangle$ $(f, g \in L^2(\mathbb{R}^d))$ に対する汎関数積分表示（経路積分表示）も含意する：

【定理 5.20】　仮定 (a.1) のもとで，任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と任意の $t > 0$ に対して

$$\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{W}} e^{-F_n(\boldsymbol{\varphi},t)} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0. \tag{5.65}$$

ただし

$$F_n(\boldsymbol{\varphi},t) := \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right)\right) + \mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)\right] \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right) - \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]. \tag{5.66}$$

証明　(5.58) によって

$$\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, Q_{t/n}^n g\rangle$$

$w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を (5.41) によって定義される関数とする．Q_t の定義と測度 μ_0 の性質によって

$$\begin{aligned}\langle f, Q_{t/n}^n g\rangle = &\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} f(\mathbf{x})^*\, e^{w(\mathbf{x},\mathbf{x}_1)}\, e^{w(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)} \cdots e^{w(\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)} \\ &\times P_{t/n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) P_{t/n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdots P_{t/n}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) g(\mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathsf{W}} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(nt/n))$$
$$\times e^{w(\boldsymbol{\varphi}(0),\boldsymbol{\varphi}(t/n))} e^{w(\boldsymbol{\varphi}(t/n),\boldsymbol{\varphi}(2t/n))} \cdots e^{w(\boldsymbol{\varphi}((n-1)t/n),\boldsymbol{\varphi}(nt/n))} d\mu_0.$$

$\sum_{j=1}^n w(\boldsymbol{\varphi}((j-1)t/n), \boldsymbol{\varphi}(jt/n)) = -F_n(\boldsymbol{\varphi}, t)$ であるから，求める結果が得られる． ∎

✱注意 5.21 注意 5.11, 5.14 と前述の証明によって，条件 (a.0) のもとでは，(5.65) において，$H_0(\mathbf{a})$ を $\overline{H_0(\mathbf{a})}$ で，F_n を

$$F_n^0(\boldsymbol{\varphi}, t) := i \sum_{j=1}^n \mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right) \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right) - \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right] \tag{5.67}$$

で置き換えた式が成立する．

さらなる理論的展開として，(5.65) の右辺において，積分と極限の交換ができるかどうかを考察するのは自然である．すなわち，$\lim_{n\to\infty} \exp F_n(\boldsymbol{\varphi}, t)$ がいかなる意味で存在するかを問うのである．これはわれわれを確率積分と呼ばれる重要な概念へと導く．だが，これについては節を改めて論じよう．

5.9 確率積分

(5.65) は，数列の一般論により，$\{F_n(\boldsymbol{\varphi}, t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその任意の部分列 $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で置き換えても成立する．また

$$\begin{aligned} F_n(\boldsymbol{\varphi}, t) = {} & i \sum_{j=1}^n \mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right) \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right) - \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right] \\ & + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right)\right) - \mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)\right] \\ & \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right) - \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.68}$$

と書き直せることに注意する．これらのことを念頭において，一般的な数学的対象の 1 つとして，各写像 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ と正数 $t > 0$ に対して，W 上の関数

$$I_n(\mathbf{f}) := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right) \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{tj}{2^n}\right) - \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right] \tag{5.69}$$

を考える．

【補題 5.22】 $\mathbf{f} \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば，$I_n(\mathbf{f}) \in L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ であり

$$\|I_n(\mathbf{f})\|^2 = \frac{t}{m} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \tag{5.70}$$

が成り立つ．

証明 (4.83) によって

$$I_n(\mathbf{f}) := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbf{g}\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right) \cdot \left[\mathbf{b}\left(\frac{tj}{2^n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]$$

と書ける．ただし，$\mathbf{g}(s) := \mathbf{f}(\mathbf{b}(s) + \mathbf{x})$ （$\mathbf{b}(s)$ は原点を出発する d 次元ブラウン運動）．したがって（次の式変形の正当性は以下で示す）

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathsf{W}} |I_n(\mathbf{f})|^2 \, d\mu_0 \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\ell=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{\beta=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0 \, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right) \\
&\quad \times \left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\left[b_\beta\left(\frac{t\ell}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{\beta=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0 \, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right) \\
&\quad \times \left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\left[b_\beta\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right] \\
&\quad + 2\sum_{j>\ell} \sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{\beta=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0 \, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right) \\
&\quad \times \left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\left[b_\beta\left(\frac{t\ell}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\right].
\end{aligned}$$

シュヴァルツの不等式とルベーグ測度の並進不変性により

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{b}(\tau))||f_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{b}(\sigma))| \, d\mathbf{x} \le \|f_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty \qquad (\tau \ge 0, \sigma \ge 0)$$

であるから，上式の各積分は有限であり，フビニの定理により，dP_0 と $d\mathbf{x}$ に関する積分の順序交換ができる．dP_0 について最初に積分すれば，ブラウン運動の独立性（4.7 節）に関する性質により $j > \ell$ のとき $b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)$ と $g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\left[b_\beta\left(\frac{t\ell}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\right]$ は独立である．したがって，$j > \ell$ ならば

$$
\begin{aligned}
&\int dP_0 g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right] \\
&\qquad \times \left[b_\beta\left(\frac{t\ell}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\right] \\
&= \left(\int dP_0 \left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\right) \\
&\qquad \times \left(\int dP_0\, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\left[b_\beta\left(\frac{t\ell}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(\ell-1)}{2^n}\right)\right]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&\int dP_0\, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right] \\
&\quad \times \left[b_\beta\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right] \\
&= \left(\int dP_0\, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right) \\
&\qquad \times \left(\int dP_0 \left[b_\alpha\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\left[b_\beta\left(\frac{tj}{2^n}\right) - b_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right]\right) \\
&= \frac{t\delta_{\alpha\beta}}{2^n m}\int dP_0\, g_\alpha\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)^* g_\beta\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

を得る．したがって

$$
\int_{\mathsf{W}} |I_n(\mathbf{f})|^2\, d\mu_0 = \frac{t}{2^n m}\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\int dP_0 \left| f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{t(j-1)}{2^n}\right)\right)\right|^2.
$$

そこで，積分の順序交換をすれば，(5.70) が得られる． ∎

【定理 5.23】 $\mathbf{f} \in \oplus^d[L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)]$ とし，$D_\alpha f_\beta\ (\alpha, \beta = 1, \cdots, d)$

は $\mathbb{R}^d$ 上で有界であるとする．このとき，$L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ における極限 $\lim_{n\to\infty} I_n(\mathbf{f})$ が存在する．

証明　直接計算により

$$I_{n+1}(\mathbf{f}) - I_n(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^{2^n} \left[\mathbf{g}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{g}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right)\right] \cdot \left[\mathbf{b}\left(\frac{2jt}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right].$$

この表示と補題 5.22 の証明における計算と同様の方法により

$$\begin{aligned}
&\|I_{n+1}(\mathbf{f}) - I_n(\mathbf{f})\|^2 \\
&= \frac{t}{2^{n+1}m} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0 \left| g_\alpha\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right) - g_\alpha\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right)\right|^2 \\
&= \frac{t}{2^{n+1}m} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0\, 2|f_\alpha(\mathbf{x})|^2 \\
&\quad - \frac{t}{2^{n+1}m} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \mathrm{Re} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0\, 2 f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right)^* \\
&\quad \times f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

を示すことができる．そこで，$d\mathbf{x}$ 積分を先に行い，変数変換をすれば

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathsf{W}} d\mu_0\, f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right)^* f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&\quad = \int_{\mathsf{W}} d\mu_0\, f_\alpha(\mathbf{x})^* f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
&\|I_{n+1}(\mathbf{f}) - I_n(\mathbf{f})\|^2 \\
&= \mathrm{Re}\left\{ \frac{t}{2^n m} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{\alpha=1}^{d} \int_{\mathsf{W}} d\mu_0 f_\alpha(\mathbf{x})^* \right. \\
&\quad \left. \times \left[f_\alpha(\mathbf{x}) - f_\alpha\left(\mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right)\right] \right\}.
\end{aligned}$$

仮定（$D_\alpha f_\beta$ の有界性）により，定数 $c_f > 0$ があって

$$|f_\alpha(\mathbf{x}) - f_\alpha(\mathbf{y})| \le c_f|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\|I_{n+1}(\mathbf{f}) - I_n(\mathbf{f})\|^2 \\
&\le \frac{tc_f}{2^n m}\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\mathsf{W}} d\mu_0\,|f_\alpha(\mathbf{x})|\left|\mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right| \\
&\le \frac{tc_f}{2^n m}\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}|f_\alpha(\mathbf{x})| \\
&\quad \times \left(\int dP_0\left|\mathbf{b}\left(\frac{(2j-2)t}{2^{n+1}}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(2j-1)t}{2^{n+1}}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{tc_f\sqrt{t}}{m\sqrt{m}2^{(n+1)/2}}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}|f_\alpha(\mathbf{x})|.
\end{aligned}$$

$0 < 1/2^{1/4} < 1$ であるから，この不等式は，$\{I_n(\mathbf{f})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ におけるコーシー列であることを意味する．よって，題意が成立する． ∎

定理 5.23 に基づいて，この定理の仮定を満たすベクトル値関数 $\mathbf{f}$ に対して，W 上の関数 $\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) \in L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ を

$$\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) := \lim_{n\to\infty} I_n(\mathbf{f}) \tag{5.71}$$

によって定義し，これを $\mathbf{f}$ の φ に関する（区間 $[0, t]$ 上での）**伊藤積分**または**確率積分**と呼ぶ．補題 5.22 によって

$$\left\|\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)\right\|^2 = \frac{t}{m}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \tag{5.72}$$

が成り立つ．

いまの結果は，作用素論的には次のように見ることができる．任意の $\mathbf{f} \in \oplus^d C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は定理 5.23 の仮定を満たすので $\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)$ が定義される．したがって，写像 $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ を

$$T\mathbf{f} := \int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s), \quad \mathbf{f} \in \oplus^d C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

によって定義することができる．明らかに T は線形であり，(5.72) によって

$$\|T\mathbf{f}\|^2 = \frac{t}{m}\|\mathbf{f}\|^2. \tag{5.73}$$

したがって，T は有界である．$\oplus^d C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であるから，拡大定理により，$\oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界線形作用素 $\widetilde{T}$ で，$T \subset \widetilde{T}$ かつ

$$\|\widetilde{T}\mathbf{f}\| = \frac{t}{m}\|\mathbf{f}\|^2, \quad \mathbf{f} \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}^d) \tag{5.74}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．そこで，任意の $\mathbf{f} \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，確率積分 $\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) \in L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ を

$$\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) := \widetilde{T}\mathbf{f} \tag{5.75}$$

によって定義する．

上に定義した確率積分は，もっと広いクラスの $\mathbf{f}$ へと拡張されうる．$\mathbb{R}$ 上の連続関数 χ で有界な台をもち，ある $R > 0$ が存在して，$\chi(x) = 1$, $|x| \leq R$ を満たすものの全体を $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ とする．$\chi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $\chi^{(d)}$ を

$$\chi^{(d)}(\mathbf{x}) := \chi(x_1)\cdots\chi(x_d), \quad \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \tag{5.76}$$

によって定義する．

各 $R > 0$ に対して，$\chi_R \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ で，$\chi_R(x) = 1$, $|x| \leq R$ を満たすものが存在する．任意の $\mathbf{f} \in \oplus^d L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$（ベクトル空間としての直和）に対して，$\chi_R^{(d)}\mathbf{f}$ は $\oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ の元であるから確率積分

$$\int_0^t (\chi_R^{(d)}\mathbf{f})(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) = \int_0^t \chi_R^{(d)}(\boldsymbol{\varphi}(s))\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)$$

は存在する．ところで，μ_0-a.e.$(\mathbf{x}, \omega) \in \mathsf{W}$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(s)(\mathbf{x}, \omega)$ は s の連続関数であるから，$[0, t]$ 上の関数として有界である．したがって，$R_{\mathbf{x},\omega} := \max_{0 \leq s \leq t}|\boldsymbol{\varphi}(s)(\mathbf{x}, \omega)|$ とすれば，$\chi_R^{(d)}(\boldsymbol{\varphi}(s)(\mathbf{x}, \omega)) = 1$, $\forall R > R_{\mathbf{x},\omega}$ が成り立つ．ゆえに，μ_0-a.e.$(\mathbf{x}, \omega) \in \mathsf{W}$ に対して，極限

$$\left(\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)\right)(\mathbf{x}, \omega) := \lim_{R \to \infty}\left(\int_0^t \chi_R^{(d)}(\boldsymbol{\varphi}(s))\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)\right)(\mathbf{x}, \omega) \tag{5.77}$$

は，χ_R の選び方によらず，一意的に存在する．こうして，任意の $\mathbf{f} \in \oplus^d L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，**確率積分** $\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)$ が定義される．ただし，この場合，$\int_0^t \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)$ が $L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ に属するとは限らない．

5.10　ファインマン–カッツ–伊藤の公式

$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t>0$ の関数 $\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\rangle$ に対する経路積分表示を求めるには，(5.68) からわかるように，$F_n(\boldsymbol{\varphi}, t)$ に含まれるもう 1 つの関数

$$J_n := \sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right)\right)-\mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)\right] \cdot\left[\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right)-\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right] \tag{5.78}$$

の収束性を調べなければならない．ただし，注意 5.21 によって，クーロンゲージで考える場合，すなわち，$\operatorname{div}\mathbf{a}=0$ の場合には，この考察は必要ない． 厳密な証明に入る前に，J_n が何に収束すべきかを発見法的に見ておこう．(4.83) によって

$$\mathbf{h}(j,n,t) := \mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{jt}{n}\right)\right)-\mathbf{a}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)$$

とおけば

$$J_n = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{h}(j,n,t)\cdot\left[\mathbf{b}\left(\frac{jt}{n}\right)-\mathbf{b}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]$$

と書ける．

$$a_\alpha(\mathbf{x})-a_\alpha(\mathbf{y}) \approx \sum_{\beta=1}^{d} D_\beta a_\alpha(\mathbf{y})(x_\beta-y_\beta) \quad (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to 0)$$

であるから，$n\to\infty$ のとき

$$J_n \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{d} D_\beta a_\alpha\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)\left(b_\beta\left(\frac{jt}{n}\right)-b_\beta\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right) \times\left(b_\alpha\left(\frac{jt}{n}\right)-b_\alpha\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right).$$

そこで，$b((j-1)t/n)$ と $b(jt/n)-b((j-1)t/n)$ の独立性に注意すれば

$$\int dP_0\, J_n \approx \int dP_0 \sum_{j=1}^{n} D_\beta a_\alpha\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right)\frac{\delta_{\beta\alpha}}{m}\frac{t}{n} \to \int dP_0\,\frac{1}{m}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds \quad (n\to\infty).$$

が得られる．したがって

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{m}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds \tag{5.79}$$

が予想される．もちろん，この場合，この収束がいかなる意味での収束であるかを明らかにしなければならない．厳密な結果は次の補題として与えられる：

【補題 5.24】 条件 (a.1) に加えて，$a_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $D_\beta a_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $D_\mu D_\beta a_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(\alpha, \beta, \mu = 1, \cdots, d)$ を仮定する．このとき，$L^2(\mathsf{W}, d\mu_0)$ の収束の意味で (5.79) が成立する．

証明　まず

$$\left\| J_n - \frac{1}{m}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds \right\|^2 = \|J_n\|^2 - \frac{2}{m}\int_0^t \langle J_n, \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\rangle\,ds$$
$$+\frac{1}{m^2}\int_0^t ds\int_0^t ds'\,\langle \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s)), \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s'))\rangle\,.$$

J_n の定義により

$$|J_n|^2 = J_n^{(1)} + 2J_n^{(2)},$$
$$J_n^{(1)} := \sum_{j=1}^n \left\{\mathbf{h}(j,n,t)\cdot\left[\mathbf{b}\left(\frac{jt}{n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]\right\}^2,$$
$$J_n^{(2)} := \sum_{j>\ell} \left\{\mathbf{h}(j,n,t)\cdot\left[\mathbf{b}\left(\frac{jt}{n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left\{\mathbf{h}(\ell,n,t)\cdot\left[\mathbf{b}\left(\frac{\ell t}{n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(\ell-1)t}{n}\right)\right]\right\}.$$

記号上の簡潔さのため，測度 μ_0 に関する期待値を $\langle\cdot\rangle$ とする．このとき

$$\left\langle \left\{\mathbf{h}(j,n,t)\cdot\left[\mathbf{b}\left(\frac{jt}{n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]\right\}^2\right\rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_2 [(\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1))\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2$$
$$\times P_{(j-1)t/n}(0,\mathbf{x}_1) P_{t/n}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2).$$

そこで，変数変換 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/\sqrt{t/n}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_1$ ($\mathbf{x}_1$ は変換しない) をすれば

$$\left\langle \left\{ \mathbf{h}(j,n,t) \cdot \left[\mathbf{b}\left(\frac{jt}{n}\right) - \mathbf{b}\left(\frac{(j-1)t}{n}\right) \right] \right\}^2 \right\rangle$$
$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^2} d\mathbf{z}\, d\mathbf{y}\, \frac{t}{n} \left[\left(\mathbf{a}\left(\mathbf{z} + \sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y} \right) - \mathbf{a}(\mathbf{z}) \right) \cdot \mathbf{y} \right]^2 P_1(0,\mathbf{y}).$$

したがって

$$\langle J_n^{(1)} \rangle = t \int_{(\mathbb{R}^d)^2} d\mathbf{z}\, d\mathbf{y} \left[\left(\mathbf{a}\left(\mathbf{z} + \sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y} \right) - \mathbf{a}(\mathbf{z}) \right) \cdot \mathbf{y} \right]^2 P_1(0,\mathbf{y}).$$

そこで

$$a_\alpha\left(\mathbf{z} + \sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y} \right) - a_\alpha(\mathbf{z}) = \sum_{\beta=1}^{d} \int_0^{\sqrt{t/n}} (D_\beta a_\alpha)(\mathbf{z} + \tau\mathbf{y}) y_\beta \, d\tau$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\langle J_n^{(1)} \rangle \\
&\le \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d} t \int_{(\mathbb{R}^d)^2} d\mathbf{z}\, d\mathbf{y}\, P_1(0,\mathbf{y}) \int_0^{\sqrt{t/n}} |(D_\beta a_\alpha)(\mathbf{z}+\tau\mathbf{y})||y_\alpha y_\beta| d\tau \\
&\quad \times \int_0^{\sqrt{t/n}} |(D_\lambda a_\mu)(\mathbf{z}+\tau'\mathbf{y})||y_\lambda y_\mu| d\tau' \\
&\le \frac{t^2}{n} \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d} \|D_\beta a_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|D_\lambda a_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y}\, P_1(0,\mathbf{y}) |y_\alpha||y_\beta||y_\lambda||y_\mu| \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \langle J_n^{(1)} \rangle = 0.$$

前段と同様の議論から

$$\begin{aligned}
&\langle J_n^{(2)} \rangle \\
&= \sum_{j>\ell} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2\, d\mathbf{x}_3\, d\mathbf{x}_4 \{[\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_4) - \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3)] \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3)\} \\
&\quad \times \{[\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)] \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\} P_{(\ell-1)t/n}(0, \mathbf{x}_1) P_{t/n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
&\quad \times P_{(j-1-\ell)t/n}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) P_{t/n}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)
\end{aligned}$$

ただし，$j-1=\ell$ の場合は，$P_0(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3)=\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3)$ と読む．変数変換 $\mathbf{y}=(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)/\sqrt{t/n}$, $\mathbf{z}=(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_3)/\sqrt{t/n}$ を行うと

$$\begin{aligned}
&\langle J_n^{(2)} \rangle \\
&= \sum_{j>\ell} \frac{t}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}_3\, d\mathbf{z} \left\{ \left[\mathbf{a}\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3+\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{z} \right) - \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3) \right] \cdot \mathbf{z} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \left[\mathbf{a}\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1+\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y} \right) - \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1) \right] \cdot \mathbf{y} \right\} P_{(\ell-1)t/n}(0, \mathbf{x}_1) P_1(0, \mathbf{y}) \\
&\quad \times P_{(j-1-\ell)t/n}\left(\mathbf{x}_1 + \sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y}, \mathbf{x}_3 \right) P_1(0, \mathbf{z}) \\
&= \sum_{j>\ell} \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d} \frac{t}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}_3\, d\mathbf{z} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\sqrt{t/n}} D_\beta a_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3+\tau\mathbf{z}) z_\alpha z_\beta\, d\tau \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^{\sqrt{t/n}} D_\lambda a_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1+\tau'\mathbf{y}) y_\mu y_\lambda\, d\tau' \right) P_{(\ell-1)t/n}(0, \mathbf{x}_1) P_1(0, \mathbf{y}) \\
&\quad \times P_{(j-1-\ell)t/n}\left(\mathbf{x}_1 + \sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y}, \mathbf{x}_3 \right) P_1(0, \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
I_n := \sum_{j>\ell} \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d} \left(\frac{t}{n} \right)^2 &\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}_3\, d\mathbf{z}\, D_\beta a_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3) z_\alpha z_\beta \\
&\times D_\lambda a_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1) y_\mu y_\lambda P_{(\ell-1)t/n}(0, \mathbf{x}_1) P_1(0, \mathbf{y}) \\
&\times P_{(j-1-\ell)t/n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) P_1(0, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

とおけば

$$I_n = \frac{1}{m^2}\sum_{j>\ell}\left(\frac{t}{n}\right)^2\left\langle \operatorname{div}\mathbf{a}\left(\varphi\left(\frac{(j-2)t}{n}\right)\right)\operatorname{div}\mathbf{a}\left(\varphi\left(\frac{(\ell-1)t}{n}\right)\right)\right\rangle.$$

定理 4.29 によって, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)\cap C^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $D_\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(\alpha = 1,\cdots,d)$ を満たす f に対して, $f(\varphi(t))$ は L^2 連続性を有するから, $\langle \operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s))\operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s'))\rangle$ は 2 変数 (s,s') の連続関数である. したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n &= \frac{1}{m^2}\int_{0\le s'<s\le t} ds\,ds'\ \langle \operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s))\operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s'))\rangle \\ &= \frac{1}{2m^2}\int_0^t ds\int_0^t ds'\ \langle \operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s))\operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s'))\rangle \\ &\qquad\qquad (s, s' \text{ に関する置換対称性}) \\ &= \frac{1}{2m^2}\left\langle\left(\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\varphi(s))\,ds\right)^2\right\rangle.\end{aligned}$$

ただし, 最後の等号はフビニの定理による.

I_n の定義から

$$\begin{aligned}&\left\langle J_n^{(2)}\right\rangle - I_n \\ &= \sum_{j>\ell}\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d}\frac{t}{n}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x}_3\,d\mathbf{z} \\ &\quad\times\int_0^{\sqrt{t/n}} d\tau\ (D_\beta a_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3+\tau\mathbf{z}) - D_\beta a_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3)) \\ &\quad\times z_\alpha z_\beta\int_0^{\sqrt{t/n}} d\tau'\ (D_\lambda a_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1+\tau'\mathbf{y}) - D_\lambda a_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)) \\ &\quad\times y_\mu y_\lambda P_{(\ell-1)t/n}(0,\mathbf{x}_1)P_1(0,\mathbf{y})P_{(j-1-\ell)t/n}\left(\mathbf{x}_1+\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y},\mathbf{x}_3\right)P_1(0,\mathbf{z}) \\ &\quad+\sum_{j>\ell}\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{d}\left(\frac{t}{n}\right)^2\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\int_{(\mathbb{R}^d)^4} d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x}_3\,d\mathbf{z}\,D_\beta a_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}_3)z_\alpha z_\beta \\ &\quad\times D_\lambda a_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)y_\mu y_\lambda P_{(\ell-1)t/n}(0,\mathbf{x}_1)P_1(0,\mathbf{y}) \\ &\quad\times\left[P_{(j-1-\ell)t/n}\left(\mathbf{x}_1+\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{y},\mathbf{x}_3\right) - P_{(j-1-\ell)t/n}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3)\right]P_1(0,\mathbf{z})\end{aligned}$$

と書ける. これまでに使用した評価と同様の評価法により

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle J_n^{(2)}\right\rangle - I_n\right| = 0$$

を示すことができる．

以上の結果をまとめれば

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle J_n^{(2)}\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\left\langle J_n^{(2)}\right\rangle - I_n\right) + I_n\right] = \frac{1}{2m^2}\left\langle\left(\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds\right)^2\right\rangle$$

が得られたことになる．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\|J_n\|^2 = \frac{1}{m^2}\left\langle\left(\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds\right)^2\right\rangle$$

が成立する．同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\langle J_n, \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\rangle = \frac{1}{m}\int_0^t ds'\,\langle \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s'))\operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\rangle$$

が成り立つ[9]．よって，題意が成立する．∎

以上の準備のもとで，$\left\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\right\rangle$ に対する経路積分表示を導くことができる：

【定理 5.25】　$a_j \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, d)$ とする．このとき，任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t > 0$ に対して

$$\left\langle f, e^{-tH_0(\mathbf{a})}g\right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F(\boldsymbol{\varphi},t)} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\,d\mu_0. \tag{5.80}$$

ただし

$$F(\boldsymbol{\varphi}, t) := i\int_0^t \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) + \frac{i}{2m}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds. \tag{5.81}$$

証明　（第 1 段）$a_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(\alpha = 1, \cdots, d)$ の場合を考える．この場合，条件 (a.1) は明らかに満たされる．また，定理 5.23 で $\mathbf{f} = \mathbf{a}$ とした場合の仮定および補題 5.24 の仮定も満たされる．

---

[9] $s > t$ の場合と $0 < s \leq t$ の場合に分けて積分表示を導き，前述の場合と同様に評価を行う．なお，後者の場合，$[0, t]$ に対するリーマン近似和を $[0, s]$ と $[s, t]$ に対するリーマン近似和の和として考えるとよい．

(5.65) で $\{F_n\}_n$ のかわりにその部分列 $\{F_{2^n}\}_n$ をとることができる．明らかに $\left|e^{-F_{2^n}(\boldsymbol{\varphi},t)}\right| = 1$ であり，$\int_{\mathsf{W}} |f(\boldsymbol{\varphi}(0))||g(\boldsymbol{\varphi}(t))|\, d\mu_0 < \infty$．一方，(5.71) と補題 5.24 によって，$\{2^n\}_n$ の部分列 $\{n_k\}_k$ があって，$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(\boldsymbol{\varphi},t) = F(\boldsymbol{\varphi},t)$, μ_0-a.e. が成り立つ．したがって，ルベーグの優収束定理により，(5.80) が得られる．

(第 2 段) $a_j \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,d)$ の場合を考える．$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で $\rho \geq 0$ かつ $\rho(\mathbf{x}) = 0$, $|\mathbf{x}| \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$ を満たすものをとり，$\rho_n(\mathbf{x}) := n^d \rho(n\mathbf{x})$ $(n \in \mathbb{N})$ とおき，$a_j^{(n)} := \rho_n * a_j$, $\mathbf{a}^{(n)} := \left(a_1^{(n)},\cdots,a_d^{(n)}\right)$ と定義する．このとき，$a_j^{(n)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$．さらに，$\left|a_j^{(n)}(\mathbf{x})\right| \leq \|a_j\|_\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_j^{(n)}(\mathbf{x}) = a_j(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ が成り立つ．したがって，前段の結果によって

$$\left\langle f, e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a}^{(n)})}} g \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-G_n}\, e^{-(i/2m)D_n} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0. \quad (5.82)$$

ただし，$G_n := \int_0^t \mathbf{a}^{(n)}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s)$, $D_n := \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{a}^{(n)}(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds$．ルベーグの優収束定理を使うことにより

$$\|G_n - F(\boldsymbol{\varphi},t)\|^2 = \frac{t}{m} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

がわかるので，部分列 $\{n_k\}_k$ があって，$\lim_{k\to\infty} G_{n_k} = F(\boldsymbol{\varphi},t)$ $(\mu_0\text{-a.e.})$．$\operatorname{div} \mathbf{a}^{(n)} = \rho_n * \operatorname{div} \mathbf{a}$ であるから，$\left|\operatorname{div} \mathbf{a}^{(n)}\right| \leq \|\operatorname{div} \mathbf{a}\|_\infty$ かつ $\operatorname{div} \mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{x}) \to \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ $(n \to \infty)$．したがって，$\lim_{n\to\infty} D_n \to \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds$ $(\mu_0\text{-a.e.})$．ゆえに，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle f, e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a}^{(n_k)})}} g \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F(\boldsymbol{\varphi},t)} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0.$$

となる．一方，ルベーグの優収束定理を用いることにより

$$\lim_{n\to\infty} H_0\big(\mathbf{a}^{(n)}\big) f = H_0(\mathbf{a}) f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

を示すのは難しくない．$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $H_0(\mathbf{a})$ の芯であったから，付録 C の定理 C.20-(iii) の応用により

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{-tH_0\left(\mathbf{a}^{(n)}\right)} = e^{-tH_0(\mathbf{a})}, \quad t > 0.$$

よって (5.80) が成立する． ∎

定理 5.25 は，内積が複数個の $e^{-tH_0(\mathbf{a})}$ を含む場合へと拡張される：

【定理 5.26】 $a_j \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,d)$ とし，$n \in \mathbb{N}$, $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f_1,\cdots f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ とする．このとき

$$\left\langle f_0, e^{-t_1 H_0(\mathbf{a})} f_1\, e^{-(t_2-t_1)H_0(\mathbf{a})} f_2 \cdots f_{n-1}\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_0(\mathbf{a})} f_n \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F(\boldsymbol{\varphi},t_n)} f_0(\boldsymbol{\varphi}(0))^* \left[\prod_{k=1}^n f_k(\boldsymbol{\varphi}(t_k))\right] d\mu_0. \tag{5.83}$$

証明 まず，$a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,d)$ の場合を考える．$s_1 = t_1$, $s_k = t_k - t_{k-1}$ $(k=2,\cdots,n)$ とおく．このとき，(5.58) を繰り返し使うことにより

$$\left\langle f_0, e^{-t_1 H_0(\mathbf{a})} f_1\, e^{-(t_2-t_1)H_0(\mathbf{a})} f_2 \cdots f_{n-1}\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_0(\mathbf{a})} f_n \right\rangle = \lim_{N_n\to\infty}\lim_{N_{n-1}\to\infty}\cdots\lim_{N_1\to\infty}\left\langle f_0, Q^{N_1}_{s_1/N_1} f_1 Q^{N_2}_{s_2/N_2} f_2 \cdots Q^{N_n}_{s_n/N_n} f_n \right\rangle.$$

そこで，この式の右辺を，定理 5.20 と同じ仕方で，測度 μ_0 に関する期待値として書き表す．これから先は，定理 5.25 の証明の第 1 段とまったく同様に考察を進めればよい．その結果，(5.83) が得られる．

次に，定理 5.25 の証明の第 2 段と同様の方法によって，(5.83) を $a_j \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,d)$ の場合へと拡張すればよい． ∎

条件 (a.0) が成り立つ場合には，次に述べるような仕方で，(5.80) をもっと広いクラスの $\mathbf{a}$ に対して拡張することができる．

【定理 5.27】 $\mathbf{a}$ は条件 (a.0) を満たすとし，$n \in \mathbb{N}$, $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f_1,\cdots f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ とする．このとき

$$\left\langle f_0, e^{-t_1 \overline{H_0(\mathbf{a})}} f_1\, e^{-(t_2-t_1)\overline{H_0(\mathbf{a})}} f_2 \cdots f_{n-1}\, e^{-(t_n-t_{n-1})\overline{H_0(\mathbf{a})}} f_n \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F^0(\boldsymbol{\varphi},t_n)} f_0(\boldsymbol{\varphi}(0))^* \left[\prod_{k=1}^n f_k(\boldsymbol{\varphi}(t_k))\right] d\mu_0. \tag{5.84}$$

ただし

$$F^0(\boldsymbol{\varphi},t) := i\int_0^t \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))\cdot d\boldsymbol{\varphi}(s). \tag{5.85}$$

証明 $n=1$ の場合だけを証明する（他の場合も同様）．$t_1 = t$ とする．$\chi_R \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ で次の性質を満たすものをとる：$\chi_R(x) = 1$, $-R \le x \le R$;

$\chi_R(x) = 0$, $|x| \geq R+1$；$|\chi'_R(x)| \leq C$, $R \leq |x| \leq R+1$（C は R によらない定数）；$|\chi_R(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. $a_{j,R}(\mathbf{x}) := \chi_R^{(d)}(\mathbf{x})a_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}_R := (a_{1,R}, \cdots, a_{d,R})$ とする．このとき，$a_{j,R} \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ であるから，定理 5.25 によって

$$\left\langle f_0, e^{-tH_0(\mathbf{a}_R)} f_1 \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F_R(\boldsymbol{\varphi},t)} f_0(\boldsymbol{\varphi}(0))^* f_1(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0.$$

が成り立つ．ただし

$$F_R(\boldsymbol{\varphi}, t) := i\int_0^t \mathbf{a}_R(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) + \frac{i}{2m}\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{a}_R(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds.$$

ここで，$\chi'_R(x) = 0$, $|x| \leq R$ に注意すれば

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \left(\prod_{\ell \neq j} \chi_R(x_\ell) \right) \chi'_R(x_j) a_j(\mathbf{x}) \to 0 \quad (R \to \infty).$$

また，$|\operatorname{div} \mathbf{a}_R(\mathbf{x})| \leq C\sum_{j=1}^d \|a_j\|_\infty$. したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{a}_R(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds = 0 \quad (\mu_0\text{-a.e.}).$$

これと拡張された確率積分の定義によって

$$\lim_{R\to\infty} F_R(\boldsymbol{\varphi}, t) = F^0(\boldsymbol{\varphi}, t) \quad (\mu_0\text{-a.e.}).$$

ゆえに，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{R\to\infty} \left\langle f_0, e^{-tH_0(\mathbf{a}_R)} f_1 \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-F^0(\boldsymbol{\varphi},t)} f_0(\boldsymbol{\varphi}(0))^* f_1(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0.$$

定理 5.25 の証明の第 2 段の場合と同様にして，$\text{s-}\lim_{R\to\infty} e^{-tH_0(\mathbf{a}_R)} = e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a})}}$, $t > 0$ が示される．よって，(5.84) が成立する． ∎

5.11 ポテンシャル V が入った場合

【定理 5.28】 $\mathbf{a}$ は条件 (a.0) を満たすとし，$H_V(\mathbf{a})$ は本質的に自己共役で下に有界であるとする．また，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$H_{V_N}(\mathbf{a})$（V_N は V の下切

断；4.8 節を参照）は本質的に自己共役であるとする．このとき，任意の $t > 0$ と $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\left\langle f, e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}} g \right\rangle = \int_{\mathsf{W}} e^{-G(\boldsymbol{\varphi},t)} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0. \tag{5.86}$$

ただし

$$G(\boldsymbol{\varphi}, t) := i \int_0^t \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot d\boldsymbol{\varphi}(s) + \int_0^t V(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds. \tag{5.87}$$

証明　まず，V が $\mathbb{R}^d$ 上で連続で下に有界な場合を考える．このとき，トロッター–加藤の積公式により

$$\left\langle f, e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}} g \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f, \left(e^{-t\overline{H_0(\mathbf{a})}/n} e^{-tV/n} \right)^n g \right\rangle.$$

$e^{-tV/n} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから，定理 5.27 を応用することにより

$$\begin{aligned} &\left\langle f, e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}} g \right\rangle \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{W}} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t)) e^{-F^0(\boldsymbol{\varphi},t)} e^{-\sum_{k=1}^n V(\boldsymbol{\varphi}(kt/n))(t/n)} d\mu_0. \end{aligned} \tag{5.88}$$

ここで，$V_0 := \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} V(\mathbf{x})$ とすれば

$$\begin{aligned} &\left| f(\boldsymbol{\varphi}(0))^* g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, e^{-F^0(\boldsymbol{\varphi},t)}\, e^{-\sum_{k=1}^n V(\boldsymbol{\varphi}(kt/n))(t/n)} \right| \\ &\quad \le |f(\boldsymbol{\varphi}(0))||g(\boldsymbol{\varphi}(t))|\, e^{-tV_0} \end{aligned}$$

であり，$\int_{\mathsf{W}} |f(\boldsymbol{\varphi}(0))||g(\boldsymbol{\varphi}(t))|\, d\mu_0 < \infty$．また

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n V\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{kt}{n} \right) \right) \frac{t}{n} = \int_0^t V(\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds \quad (\mu_0\text{-a.e.}).$$

したがって，ルベーグの優収束定理により，(5.88) の右辺は，$\int_{\mathsf{W}} e^{-G(\boldsymbol{\varphi},t)} f(\boldsymbol{\varphi}(0))^*\, g(\boldsymbol{\varphi}(t))\, d\mu_0$ に等しい．ゆえに (5.86) が得られる．

定理の仮定を満たす一般の V の場合については，定理 4.20 の結果を使用し，定理 4.20 の証明と同様に近似・極限議論を行えばよい．　■

(5.86) も**ファインマン–カッツ–伊藤の公式**と呼ばれる．

∗注意 5.29　ファインマン–カッツ–伊藤の公式 (5.86) はさらに一般的なベクトルポテンシャル $\mathbf{a}$ へと拡張されうる[10].

次の定理は，定理 5.16 の別証明（汎関数積分法による証明）を与える：

【定理 5.30】　定理 5.28 の仮定のもとで，すべての $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $t > 0$ に対して

$$\left|e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}f(\mathbf{x})\right| \le \left(e^{-tH_V}|f|\right)(\mathbf{x}), \quad \text{a.e.}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.89}$$

証明　定理 5.28 によって，任意の $t > 0$ と $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f, e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}g\right\rangle\right| &\le \int_{\mathsf{W}} e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}|f(\varphi(0))||g(\varphi(t))|\,d\mu_0 \\ &= \left\langle |f|, e^{-t\overline{H}_V}|g|\right\rangle.\end{aligned}$$

そこで，付録 A の定理 A.4 を $F = e^{-t\overline{H_V(\mathbf{a})}}g$, $G = e^{-t\overline{H}_V}|g| \ge 0$（∵ 定理 4.36）として応用すれば，(5.89) が得られる．■

関連図書

[1]　新井朝雄，『フォック空間と量子場 下』，日本評論社，2000.

[2]　新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[3]　新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I, II』，朝倉書店，1999.

[4]　H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer, 1987.

[5]　伊藤 清，『確率論』，岩波書店，1991.

[6]　H. Leinfelder and C. Simader, Schrödinger operators with singular magnetic potentials, *Math. Zeitschrift*, **176** (1981), 1–19.

[7]　B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[10] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics* (Academic Press, 1979), Theorem 15.5 を参照.

第6章

ボソンフォック空間とガウス超過程

6.1 はじめに

物質の究極的な微視的構成要素である素粒子は生成したり消滅したりする特性をもつ．素粒子の生成あるいは消滅は量子力学的状態の変化として捉えられる．素粒子がそこから生成し，そして消滅することにより，そこに還っていく状態は**真空** (vacuum) と呼ばれる．真空とは外的には "無" の状態として特徴づけられる (内的には "有")．素粒子の固有の性質を内包し，真空から素粒子を生成させたり消滅させたりする機能を有する対象を当の素粒子の**量子場** (quantum field) と呼ぶ．素粒子は，そのスピンの大きさに応じて，大きく 2 つに分類される．すなわち，整数 $(0, 1, 2, \cdots)$ のスピンを有する素粒子を**ボース粒子**または**ボソン**といい，半整数 $(1/2, 3/2, 5/2, \cdots)$ のスピンを有する素粒子を**フェルミ粒子**または**フェルミオン**という．素粒子のこの分類に応じて，量子場も 2 種類に分かれる．すなわち，ボソンの量子場とフェルミオンの量子場である．前者を**ボース場**，後者を**フェルミ場**と呼ぶ．量子場を根本的な対象としてその基礎に据え，素粒子の世界の現象を統一的・原理的に解明しようとする理論は**量子場の理論**と呼ばれる．それは，無限自由度の量子力学の一範疇を形成する．

この章では，まず，量子場の理論のうち，ボース場を記述する理論—**ボース場の理論**—の基礎となる数学的枠組みの 1 つを論述する．これは純数学的には，ボソンフォック空間と呼ばれる "大きな" ヒルベルト空間に関する理論である．次に，ボソンフォック空間の理論のある側面は確率論的な記述ができる

ことを示す．

6.2 フォック空間

$\mathcal{K}$ を複素ヒルベルト空間とし，各自然数 n に対して，$\mathcal{K}$ の n 重テンソル積ヒルベルト空間を

$$\otimes^n \mathcal{K} = \underbrace{\mathcal{K} \otimes \cdots \otimes \mathcal{K}}_{n\text{ 個}} \tag{6.1}$$

とする．$n = 0$ の場合については，$\otimes^0 \mathcal{K} := \mathbb{C}$ と規約する．可算無限個のヒルベルト空間 $\otimes^n \mathcal{K}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の無限直和ヒルベルト空間

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{K}) &:= \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n \mathcal{K} \\ &= \left\{ \psi = \left\{ \psi^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} \,\middle|\, \psi^{(n)} \in \otimes^n \mathcal{K},\ n \geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2_{\otimes^n \mathcal{K}} < \infty \right\} \end{aligned} \tag{6.2}$$

を $\mathcal{K}$ 上の**全フォック空間** (full Fock space) と呼ぶ．無限直和ヒルベルト空間の定義により，$\mathcal{F}(\mathcal{K})$ の内積は

$$\langle \psi, \phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \psi^{(n)}, \phi^{(n)} \right\rangle_{\otimes^n \mathcal{K}}, \quad \psi = \left\{ \psi^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty},\ \phi = \left\{ \phi^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathcal{K}) \tag{6.3}$$

で与えられる．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathfrak{S}_n$ によって，n 次の対称群，すなわち，$1, 2, \cdots, n$ の置換の全体を表す．このとき，$\otimes^n \mathcal{K}$ 上の正射影作用素 S_n で

$$S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}, \qquad f_j \in \mathcal{K},\ j = 1, \cdots, n \tag{6.4}$$

を満たすものがただ1つ存在する[1]．右辺を見ればわかるように，$S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$ は，各置換 σ と $f_1, \cdots, f_n$ からつくられるテンソル積 $f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$ をすべての置換にわたってたしあげて，それを $n!$ で割ったものである．当然，予想されるように

$$S_n(f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}) = S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \tag{6.5}$$

[1] 新井朝雄・江沢 洋,『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の p.418–422 を参照．

が成り立つ．すなわち，$S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$ は $f_1, \cdots, f_n$ の任意の置換に対して不変である．このゆえに作用素 S_n は n 次の**対称化作用素**と呼ばれる．作用素 S_n は正射影作用素であるから，その値域 $S_n(\otimes^n \mathcal{K}) = \mathrm{Ran}\,(S_n)$ は $\otimes^n \mathcal{K}$ の閉部分空間，したがって，ヒルベルト空間である．そこで

$$\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K} := S_n(\otimes^n \mathcal{K}) \tag{6.6}$$

とおき，これを $\mathcal{K}$ の $\boldsymbol{n}$ **重対称テンソル積ヒルベルト空間**という．便宜上，$\otimes_{\mathrm{s}}^0 \mathcal{K} := \mathbb{C}$ とおく．

n 重対称テンソル積ヒルベルト空間 $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の無限直和ヒルベルト空間

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) &:= \oplus_{n=0}^\infty \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K} \\ &= \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty \,\middle|\, \psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K},\ n \geq 0,\ \sum_{n=0}^\infty \left\|\psi^{(n)}\right\|_{\otimes^n \mathcal{K}}^2 < \infty \right\} \end{aligned} \tag{6.7}$$

を $\mathcal{K}$ 上の**ボソンフォック空間**または**対称フォック空間**と呼ぶ．

各 $n \geq 0$ に対して

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K}) := \left\{ \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) \,\middle|\, \psi^{(m)} = 0,\ \forall m \neq n \right\} \tag{6.8}$$

は閉部分空間であり，直交分解

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) = \oplus_{n=0}^\infty \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K}) \tag{6.9}$$

が成立する．閉部分空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ を $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ の $\boldsymbol{n}$ **粒子空間**と呼ぶ．このヒルベルト空間は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ と自然な仕方で同型である．実際，写像 $u_n: \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K} \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ を $u_n\left(\psi^{(n)}\right) := \phi$, $\psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ $\left(\phi^{(m)} = 0,\ m \neq n; \phi^{(n)} = \psi^{(n)}\right)$ によって定義すれば，u_n はユニタリ作用素である．この同型の意味で，$\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ と $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ をしばしば同一視する．

$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ の 0 粒子空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(0)}(\mathcal{K})$ の零でない元は，物理的には，真空状態を記述する．特に，簡潔な形のベクトル

$$\Omega := \{1, 0, 0, 0, \cdots\} \tag{6.10}$$

を**ボソンフォック真空**または単に**真空**と呼ぶ．$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(0)}(\mathcal{K})$ の他の元はボソンフォック真空の定数倍で与えられる：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(0)}(\mathcal{K}) = \{\alpha\Omega \mid \alpha \in \mathbb{C}\}. \tag{6.11}$$

量子力学の状態相等の原理にしたがって，$\alpha\Omega$ ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) と Ω は同じ真空状態（粒子が存在しない状態）を記述する．

Ω が $\mathcal{K}$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ のボソンフォック真空であることを明確にしたい場合（たとえば，別のヒルベルト空間 $\mathcal{K}'$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}')$ も同時に考えているような場合）には，Ω を $\Omega_{\mathcal{K}}$ と記す．

無限直和ヒルベルト空間の定義により，ヒルベルト空間 $\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{K}$, $n \geq 0$ の代数的無限直和

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}) := \Big\{\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \,\Big|\, \psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{K},\ n \geq 0, \text{ある } n_0 \geq 0 \text{ があって } n \geq n_0 \Longrightarrow \psi^{(n)} = 0\Big\} \quad (6.12)$$

は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．この部分空間の元を**有限粒子ベクトル**といい，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を**有限粒子ベクトル空間**と呼ぶ．

有限粒子ベクトル空間と関連して，諸々の計算をする上で有用な稠密な部分空間を導入しよう．$\mathcal{D}$ を $\mathcal{K}$ の稠密な部分空間とする．このとき，各自然数 n に対して，$\mathcal{D}$ の ***n* 重代数的テンソル積**

$$\hat{\otimes}^n\mathcal{D} := \mathcal{L}(\{f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \mid f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}) \quad (6.13)$$

は $\otimes^n\mathcal{K}$ で稠密である．したがって，その対称化

$$\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n\mathcal{D} := S_n(\hat{\otimes}^n\mathcal{D}) = \mathcal{L}(\{S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \mid f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}) \quad (6.14)$$

—$\mathcal{D}$ の ***n* 重代数的対称テンソル積**—は $\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{K}$ で稠密である．そこで，$\mathbb{C}$ および $\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n\mathcal{D}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) の代数的無限直和

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D}) := \Big\{\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \,\Big|\, \psi^{(0)} \in \mathbb{C},\ \psi^{(n)} \in \hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n\mathcal{D},\ n \geq 1, \text{ある } n_0 \geq 0 \text{ があって } n \geq n_0 \Longrightarrow \psi^{(n)} = 0\Big\} \quad (6.15)$$

を考えると，これは $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．なお，$\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密でない場合も $\hat{\otimes}^n\mathcal{D}$, $\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n\mathcal{D}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ はそれぞれ，上のように定義される．

6.3　生成作用素と消滅作用素

各 $f \in \mathcal{K}$ と $n \geq 0$ に対して，写像 $a_n^{\dagger}(f) : \otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{K} \to \otimes_{\mathrm{s}}^{n+1}\mathcal{K}$ を

$$a_n^{\dagger}(f)\psi := \sqrt{n+1}S_{n+1}(f \otimes \psi), \quad \psi \in \otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{K} \quad (6.16)$$

によって定義する．容易にわかるように，$a_n^\dagger(f)$ は線形である．さらに，$\|S_{n+1}\| = 1$ に注意すれば

$$\left\|a_n^\dagger(f)\psi\right\| \le \sqrt{n+1}\|f\|\|\psi\| \tag{6.17}$$

がわかる．したがって，$a_n^\dagger(f)$ は有界な線形作用素であり

$$\left\|a_n^\dagger(f)\right\| \le \sqrt{n+1}\|f\| \tag{6.18}$$

が成り立つ．したがって，その共役作用素を $a_n(f)$ とすれば，これは $\otimes_{\mathrm{s}}^{n+1}\mathcal{K}$ から $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathcal{K}$ への有界線形作用素であり

$$\left\langle \phi, a_n^\dagger(f)\psi \right\rangle = \left\langle a_n(f)\phi, \psi \right\rangle, \quad \phi \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n+1}\mathcal{K},\ \psi \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathcal{K}, \tag{6.19}$$

$$\|a_n(f)\| \le \sqrt{n+1}\|f\| \tag{6.20}$$

が成り立つ．

作用素の列 $\left\{a_n^\dagger(f)\right\}_{n=0}^\infty$ から，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の写像 $a^\dagger(f)$ が次のように定義される：

$$D\big(a^\dagger(f)\big) := \left\{ \psi = \left\{\psi^{(n)}\right\}_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty n\left\|S_n(f\otimes\psi^{(n-1)})\right\|^2 < \infty \right\}, \tag{6.21}$$

$$\big(a^\dagger(f)\psi\big)^{(0)} := 0, \tag{6.22}$$

$$\big(a^\dagger(f)\psi\big)^{(n)} := a_{n-1}^\dagger(f)\psi^{(n-1)} = \sqrt{n}S_n\big(f\otimes\psi^{(n-1)}\big), \quad n \ge 1. \tag{6.23}$$

容易にわかるように，$\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ ならば $a^\dagger(f)\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n+1)}(\mathcal{K})$ となっている．すなわち，$a^\dagger(f)$ は n 粒子空間を $(n+1)$ 粒子空間へ移す．言い換えれば，$a^\dagger(f)$ は粒子数を 1 つ増やす働きをする．この理由から，$a^\dagger(f)$ は**生成作用素** (creation operator) と呼ばれる．対応：$f \mapsto a^\dagger(f)$ は線形である：

$$a^\dagger(\alpha f + \beta g)\psi = \left(\alpha a^\dagger(f) + \beta a^\dagger(g)\right)\psi,$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathcal{K},\ \psi \in D\big(a^\dagger(f)\big) \cap D\big(a^\dagger(g)\big). \tag{6.24}$$

生成作用素の基本的性質は次の命題にまとめられる：

【命題 6.1】 $f \in \mathcal{K}$ を任意に固定する.

(i) $a^\dagger(f)$ は閉線形作用素である.

(ii) $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}) \subset D\big(a^\dagger(f)\big)$ であり，$a^\dagger(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にする．すなわち，$\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ ならば $a^\dagger(f)\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$.

(iii) 任意の部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$ とすべての $g \in \mathcal{D}$ に対して，$a^\dagger(g)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ を不変にする.

証明 (i) $a^\dagger(f)$ の線形性を確かめるのは容易であろう．その閉性を示すために，$\psi_N \in D\big(a^\dagger(f)\big)$, $\psi_N \to \psi \in \mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$, $a^\dagger(f)\psi_N \to \phi \in \mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$ $(N \to \infty)$ としよう．このとき，各 $n \geq 0$ に対して，$\psi_N^{(n)} \to \psi^{(n)}$, $\big(a^\dagger(f)\psi_N\big)^{(n)} \to \phi^{(n)}$ $(N \to \infty)$. したがって，$\phi^{(0)} = 0$ であり，$n \geq 1$ に対して，$a_{n-1}^\dagger(f)\psi_N^{(n-1)} \to \phi^{(n)}$ $(N \to \infty)$. 一方，$f \otimes \psi_N^{(n-1)} \to f \otimes \psi^{(n-1)}$ $(N \to \infty)$. $a_{n-1}^\dagger(f)$ は有界線形であるから $\phi^{(n)} = a_{n-1}^\dagger(f)\psi^{(n-1)} = \sqrt{n}S_n\big(f \otimes \psi^{(n-1)}\big)$ となる．$\phi \in \mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$ により，$\sum_{n=1}^\infty \big\|\phi^{(n)}\big\|^2 < \infty$ であるから，$\psi \in D\big(a^\dagger(f)\big)$ かつ $a^\dagger(f)\psi = \phi$ となる．したがって，$a^\dagger(f)$ は閉である.

(ii) $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ ならば，ある $n_0 \geq 0$ があって $\psi^{(n)} = 0, n \geq n_0$. したがって，$S_n\big(f \otimes \psi^{(n-1)}\big) = 0$, $n \geq n_0 + 1$. ゆえに，$a^\dagger(f)\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$.

(iii) $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ ならば，$g \otimes \psi^{(n-1)} \in \hat{\otimes}^n \mathcal{D}$. したがって，$S_n\big(g \otimes \psi^{(n-1)}\big) \in \hat{\otimes}_\mathrm{s}^n \mathcal{D}$. ゆえに題意がしたがう. ∎

命題 6.1-(ii) によって，すべての $f \in \mathcal{K}$ に対して，$D\big(a^\dagger(f)\big)$ は $\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$ で稠密である．したがって，$a^\dagger(f)$ は共役作用素をもつ．これを $a(f)$ と記す：

$$a(f) := \big(a^\dagger(f)\big)^*, \quad f \in \mathcal{K}. \tag{6.25}$$

したがって，任意の $\psi \in D(a^\dagger(f))$ と $\phi \in D(a(f))$ に対して

$$\langle a(f)\phi, \psi\rangle = \big\langle \phi, a^\dagger(f)\psi\big\rangle \tag{6.26}$$

が成り立つ．共役作用素は閉であるから，$a(f)$ は閉作用素である．定義 (6.25) と (6.24) によって，対応 : $f \mapsto a(f)$ は反線形であることに注意しよう：

$$a(\alpha f + \beta g)\psi = (\alpha^* a(f) + \beta^* a(g))\,\psi,$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathcal{K},\ \psi \in D(a(f)) \cap D(a(g)). \tag{6.27}$$

作用素 $a(f)$ の定義域と作用は次のように同定される：

【命題 6.2】　任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して次が成り立つ：

$$D(a(f)) = \left\{ \phi = \{\phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \left\|a_n(f)\phi^{(n+1)}\right\|^2 < \infty \right\}, \quad (6.28)$$

$$(a(f)\phi)^{(n)} = a_n(f)\phi^{(n+1)}, \quad n \geq 0,\ \phi \in D(a(f)). \quad (6.29)$$

証明　(6.28) の右辺の集合を D_f とする．まず，$D(a(f)) \subset D_f$ を示そう．そこで，$\phi \in D(a(f))$ とする．このとき，(6.26) がすべての $\psi \in D(a^\dagger(f))$ に対して成り立つ．したがって，特に，各 n と任意の $\psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ に対して

$$\left\langle (a(f)\phi)^{(n)}, \psi^{(n)} \right\rangle = \left\langle \phi^{(n+1)}, a_n^\dagger(f)\psi^{(n)} \right\rangle.$$

これは，$a_n(f)\phi^{(n+1)} = (a(f)\phi)^{(n)}$ であることを意味する．いま，仮定により，$\sum_{n=0}^{\infty} \|(a(f)\phi)^{(n)}\|^2 = \|a(f)\phi\|^2 < \infty$ であるから，$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(f)\phi^{(n+1)}\|^2 < \infty$．したがって，$D(a(f)) \subset D_f$ であり，(6.29) が成立する．

次に，$D_f \subset D(a(f))$ を示そう．$\phi \in D_f$ とする．このとき，任意の $\psi \in D\big(a^\dagger(f)\big)$ に対して

$$\left\langle \phi, a^\dagger(f)\psi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \phi^{(n+1)}, a_n^\dagger(f)\psi^{(n)} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle a_n(f)\phi^{(n+1)}, \psi^{(n)} \right\rangle.$$

そこで，$\eta^{(n)} := a_n(f)\phi^{(n+1)}$, $n \geq 0$ とし，$\eta = \left\{\eta^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ とすれば，$\phi \in D_f$ により，$\eta \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ であり，$\left\langle \phi, a^\dagger(f)\psi \right\rangle = \langle \eta, \psi \rangle$ となる．$\psi \in D\big(a^\dagger(f)\big)$ は任意であったから，これは，$\phi \in D\Big(\big(a^\dagger(f)\big)^*\Big) = D(a(f))$ かつ $a(f)\phi = \eta$ を意味する．したがって，$D_f \subset D(a(f))$．　■

(6.29) によって，$a(f)$ は，任意の $n \geq 1$ に対して，n 粒子空間を $(n-1)$ 粒子空間に移すことがわかる．したがって，$a(f)$ は粒子を 1 つ減らす働きをする．この理由から，$a(f)$ は**消滅作用素**と呼ばれる．(6.29) において $\phi = \Omega$ の場合を考えると

$$a(f)\Omega = 0, \quad \forall f \in \mathcal{K} \quad (6.30)$$

が成り立つことがわかる．

【命題 6.3】　$f \in \mathcal{K}$ を任意にとる．

(i) $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}) \subset D(a(f))$ であり，$a(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にする．

(ii) 任意の $n \geq 1$ と $\phi = \{\phi^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, $\phi^{(m)} = 0$, $m \neq n$; $\phi^{(n)} = S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)\}$ という形のベクトルに対して

$$(a(f)\phi)^{(m)} = 0, \ m \neq n-1, \tag{6.31}$$

$$(a(f)\phi)^{(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \, S_{n-1}\big(f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_j \otimes \cdots \otimes f_n\big) \tag{6.32}$$

が成り立つ．ただし，$\hat{f}_j$ は f_j を除くことを意味し，$S_0 := 1$ とする．

証明　(i) すでに述べたことから明らか．

(ii) (6.31) は上述のことから明らか．$\psi \in D\big(a^\dagger(f)\big)$ を $\psi^{(k)} = 0, k \neq n-1$ のようにとる．このとき，

$$\begin{aligned}
&\big\langle (a(f)\phi)^{(n-1)}, \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&= \big\langle \phi^{(n)}, (a(f)^*\psi)^{(n)} \big\rangle \\
&= \big\langle S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), \sqrt{n} S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}) \big\rangle \\
&= \sqrt{n} \big\langle S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), f \otimes \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&= \sqrt{n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \big\langle f_{\sigma(1)}, f \big\rangle \big\langle f_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}, \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle f_1, f \rangle \big\langle S_{n-1}(f_2 \otimes \cdots \otimes f_n), \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle f_2, f \rangle \big\langle S_{n-1}(f_1 \otimes f_3 \otimes \cdots \otimes f_n), \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle f_j, f \rangle \big\langle S_{n-1}(f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_j \otimes \cdots \otimes f_n), \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle f_n, f \rangle \big\langle S_{n-1}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1}), \psi^{(n-1)} \big\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, f \rangle \, S_{n-1}(f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_j \otimes \cdots \otimes f_n), \psi^{(n-1)} \right\rangle.
\end{aligned}$$

$\psi^{(n-1)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n-1}\mathcal{K}$ は任意であるから，(6.32) が成り立つ．■

命題 6.3-(i) は，$D(a(f))$ が $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密であることを語る．この事実と $a^\dagger(f)$ の閉性（命題 6.1-(i)）により

$$a(f)^* = a^\dagger(f) \tag{6.33}$$

がしたがう．そこで，以後，$a^\dagger(f)$ のかわりに $a(f)^*$ を用い，これも生成作用素と呼ぶ．$a^\#(f)$ によって，$a(f)$ または $a(f)^*$ を表す．対応 $a^\# : f \mapsto a^\#(f)$ は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$ 上の閉線形作用素の集合への写像である．そこで，この写像の変数としての f を**試験ベクトル** (test vector) と呼ぶ[2].

同一のヒルベルト空間で作用する 2 つの線形作用素 A, B について

$$[A, B] := AB - BA \tag{6.34}$$

によって定義される線形作用素 $[A, B]$ $(D([A, B]) := D(AB) \cap D(BA))$ を A と B の**交換子** (commutator) という．

部分空間 $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ と線形作用素 C があって，$D \subset D(C)$ かつすべての $\psi \in D$ に対して，$[A, B]\psi = C\psi$ が成り立つとき，「A, B は D 上で，交換関係 $[A, B] = C$ を満たす」という．

生成作用素と消滅作用素の基本的性質を次の定理にまとめておく：

【定理 6.4】 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{K}$ の部分空間とする．

(i) 各 $f \in \mathcal{D}$ に対して，$a^\#(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ 上で交換関係

$$[a(f), a(g)] = 0, \tag{6.35}$$

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g \rangle\,, \tag{6.36}$$

$$[a(f)^*, a(g)^*] = 0, \quad f, g \in \mathcal{K} \tag{6.37}$$

を満たす．

(ii) 各 $f \in \mathcal{K}$ に対して，$a^\#(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で交換関係 (6.35)〜(6.37) を満たす．

(iii)
$$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}(\{\Omega,\ a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}). \tag{6.38}$$

(iv) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，$\mathcal{L}(\{\Omega, a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega \mid n \in \mathbb{N}, f_j \in \mathcal{D}, j = 1, \cdots, n\})$ は $\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{K})$ で稠密である．

---

[2] $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分な関数で有界な台をもつものの全体 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ や急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元を超関数論の観点から試験関数と呼ぶのにならったもの．

さらに，すべての $n, m \geq 1$ と $f_j, g_k \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, n,\ k = 1, \cdots, m)$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\langle a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* \Omega, a(g_1)^* \cdots a(g_m)^* \Omega \right\rangle \\ &\quad = \delta_{nm} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left\langle f_1, g_{\sigma(1)} \right\rangle \cdots \left\langle f_n, g_{\sigma(n)} \right\rangle. \end{aligned} \tag{6.39}$$

(v) $\mathcal{D}$ が稠密ならば，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $a^{\#}(f)$ $(f \in \mathcal{D})$ の芯である[3].

証明 (i) 不変性に関する言明は生成作用素と消滅作用素の定義から容易に証明される．交換関係については，ここでは，(6.36) だけを証明する（他の場合は読者の演習とする）．$n \geq 0$ を任意にとり，次の型のベクトル $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ について，$[a(f), a(g)^*]\psi = \langle f, g \rangle \psi \cdots (*)$ を示せば十分である：

$$\begin{aligned} &\psi^{(k)} = 0, \quad k \neq n, \\ &\psi^{(n)} = S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), \quad f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

ただし，$n = 0$ のときは，$\psi^{(0)} = \alpha \in \mathbb{C}$ とする．生成作用素の定義により

$$(a(g)^*\psi)^{(n+1)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}\left(g \otimes \psi^{(n)}\right) = \sqrt{n+1} S_{n+1}(g \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$$

であるから，(6.32) によって

$$\begin{aligned} &(a(f)a(g)^*\psi)^{(n)} \\ &\quad = \langle f, g \rangle S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) + \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle S_n(g \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_j \otimes \cdots \otimes f_n). \end{aligned}$$

ただし，$n = 0$ の場合は，右辺の第 2 項は 0 と読む．他方

$$\begin{aligned} (a(g)^* a(f)\psi)^{(n)} &= \sqrt{n} S_n\left(g \otimes (a(f)\psi)^{(n-1)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle S_n(g \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_j \otimes \cdots \otimes f_n). \end{aligned}$$

ただし，ψ の取り方で $n = 0$ の場合は，(6.30) により，$a(f)\psi = 0$ であるから，$a(g)^* a(f)\psi = 0$ である．したがって

$$([a(f), a(g)^*]\psi)^{(n)} = \langle f, g \rangle \psi^{(n)}.$$

[3] T をヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の閉線形作用素とする．部分空間 $D \subset D(T)$ について，$T|D$（T の D への制限）が可閉であり，$\overline{T|D} = T$ が成り立つとき，D を T の芯 (core) という．

$k \neq n$ に対して，$([a(f), a(g)^*]\psi)^{(k)} = 0 = \langle f, g\rangle \psi^{(k)}$ が成り立つことは容易にわかる．ゆえに $(*)$ が成立する．

(ii) 不変性に関する言明についての証明は (i) の場合と同様である．$\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を任意にとる．このとき，自然数 n_0 があって，$n > n_0$ ならば，$\psi^{(n)} = 0$ が成り立つ．各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^m \mathcal{K}$ は $\otimes_{\mathrm{s}}^m \mathcal{K}$ で稠密であるから，$m \leq n_0$ に対して，$\psi_N^{(m)} \in \hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^m \mathcal{K}$ で，$\lim_{N\to\infty} \psi_N^{(m)} = \psi^{(m)}$ となるものがとれる．そこで，$\psi_N^{(n)} := 0,\ n > n_0$ とし，$\psi_N := \left\{\psi_N^{(n)}\right\}_{n=0}^\infty$ とすれば，$\psi_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ であり，$\lim_{N\to\infty} \psi_N = \psi$ が成り立つ．(i) により

$$a(f)a(g)^*\psi_N - a(g)^*a(f)\psi_N = \langle f, g\rangle \psi_N.$$

これは，成分ごとに表せば

$$a_n(f)a_n^\dagger(g)\psi_N^{(n)} - a_{n-1}^\dagger(g)a_{n-1}(f)\psi_N^{(n)} = \langle f, g\rangle \psi_N^{(n)}, \quad n \geq 0$$

と同値である．すでに知っているように，$a_m^\dagger(g), a_m(f)$ $(m \geq 0)$ は有界作用素であるから，この式で $N \to \infty$ とすれば

$$a_n(f)a_n^\dagger(g)\psi^{(n)} - a_{n-1}^\dagger(g)a_{n-1}(f)\psi^{(n)} = \langle f, g\rangle \psi^{(n)}, \quad n \geq 0$$

が得られる．これは $[a(f), a(g)^*]\psi = \langle f, g\rangle \psi$ と同値である．したがって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上でも (6.36) は成立する．(6.35), (6.37) についても同様である．

(iii) 生成作用素とボソンフォック真空の定義により，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$(a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega)^{(n)} = \sqrt{n!}S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), \tag{6.40}$$

$$(a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega)^{(m)} = 0, \quad m \neq n \tag{6.41}$$

となることがわかる（n に関する帰納法で示せ）．したがって

$$\mathcal{L}(\{a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega \mid f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}) = \hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n \mathcal{D}. \tag{6.42}$$

ゆえに (6.38) が成立する．

(iv) 前半の言明は，$\mathcal{D}$ が稠密ならば，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ が $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密であることと (iii) による．

(6.40) と (6.41) から, $n \neq m$ ならば, $a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega$ と $a(g_1)^* \cdots a(g_m)^*\Omega$ が直交することは明らか．また，S_n が正射影作用素であることに注意すれば

$$\begin{aligned}&\langle a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega, a(g_1)^* \cdots a(g_n)^*\Omega\rangle \\ &= \left\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle f_1, g_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle f_n, g_{\sigma(n)} \rangle\end{aligned}$$

となる．したがって，(6.39) が成立する．

(v) $f \in \mathcal{D}$ とする．任意の $\psi \in D(a(f)^*)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して, $\psi_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を $\psi_N^{(n)} := \psi^{(n)}, n \le N$; $\psi^{(n)} := 0, n \ge N+1$ によって定義すれば, $\psi_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ であり，$\|\psi_N - \psi\| \to 0$, $\|a(f)^*\psi_N - a(f)^*\psi\| \to 0$ $(N \to \infty)$ が成り立つことは容易に確かめられる．したがって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ は $a(f)^*$ の芯である．

次に $\phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を任意にとる．このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって, $n \ge n_0+1$ ならば $\phi^{(n)} = 0$ である．$\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n \mathcal{D}$ は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ で稠密であるから，各 $n \le n_0$ に対して，$\phi_N^{(n)} \to \phi^{(n)} (N \to \infty)$ となるベクトル $\phi_N^{(n)} \in \hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n \mathcal{D}$ が存在する．そこで, $\phi_N := \{\phi_N^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ $\left(\phi_N^{(n)} := 0,\ n \ge n_0 + 1\right)$ とすれば，$\phi_N \to \phi$ $(N \to \infty)$ が成り立つ．さらに

$$\left\|(a(g)^*\psi)^{(n)}\right\| \le \sqrt{n}\|g\|\left\|\psi^{(n-1)}\right\|, \quad g \in \mathcal{K},\ \psi \in D(a(f)^*) \tag{6.43}$$

を使えば，$a(f)^*\phi_N \to a(f)^*\phi$ $(N \to \infty)$ も証明される．$\phi_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ であるから，いまの事実は，$a(f)^*|\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}) \subset \overline{a(f)^*|\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})}$ を意味する．前半の事実から, 左辺の作用素の閉包は $a(f)^*$ に等しいから，$a(f)^* = \overline{a(f)^*|\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})}$ が導かれる．したがって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $a(f)^*$ の芯である．$a(f)$ についても同様. ∎

(6.39)—または (6.40) と (6.41)—は，ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ の完全正規直交系 (CONS) の 1 つをどのように構成すればよいかを示唆する．次にこの側面を調べよう．いま，$\mathcal{K}$ は可分であるとし，$\{e_k\}_{k=1}^\infty$ を $\mathcal{K}$ の CONS とする．各 $n \in \mathbb{N}$ と $\nu = \{\nu_j\}_{j=1}^\infty \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}$ （(2.55) を参照）に対して，ベクトル $\Omega_\nu^{(n)} \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ を

$$\Omega_\nu^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^\infty \nu_j!}} (a(e_1)^*)^{\nu_1} \cdots (a(e_j)^*)^{\nu_j} \cdots \Omega \tag{6.44}$$

によって定義する．

【定理 6.5】

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\left\{\Omega_\nu^{(n)} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}\right\}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ の CONS である．

(ii) $\left\{\Omega, \Omega_\nu^{(n)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}\right\}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ の CONS である．

証明 (i) (6.39) によって $\left\{\Omega_\nu^{(n)} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}\right\}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ の正規直交系である．テンソル積の理論でよく知られているように，

$$\left\{\frac{S_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})}{\|S_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})\|} \,\middle|\, 1 \le i_1 \le \cdots \le i_n\right\}$$

は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ の CONS をなす[4]．この事実と (6.40) により，正規直交系 $\left\{\Omega_\nu^{(n)} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{Z}_+^{\infty,n}\right\}$ の完全性が導かれる．

(ii) (i) と無限直和ヒルベルト空間の性質による． ∎

6.4 個数作用素

ボソンフォック空間上の自然な作用素の 1 つとして，各粒子数 n がその固有値であり，n 粒子空間がその固有空間となっているものが考えられる．実際，次のように定義される作用素 N_{b} がそれである：

$$D(N_{\mathrm{b}}) := \left\{\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty\right\}, \tag{6.45}$$

$$(N_{\mathrm{b}}\psi)^{(n)} := n\psi^{(n)}, \quad n \ge 0,\ \psi \in D(N_{\mathrm{b}}). \tag{6.46}$$

作用素 N_{b} が自己共役であることは容易に証明される[5]．また，任意の n 粒子ベクトル $\psi_n \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$ に対して

$$N_{\mathrm{b}}\psi_n = n\psi_n$$

が成り立つ．したがって，確かに，n は N_{b} の固有値であり

$$\ker(N_{\mathrm{b}} - n) = \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{K})$$

[4] たとえば，拙著，『フォック空間と量子場 上』(日本評論社，2000) の命題 1-15 を参照．

[5] N_{b} の対称性および $\mathrm{Ran}\,(N_{\mathrm{b}} \pm i) = \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ を示せ．

となっている．さらに，$N_{\rm b}$ のスペクトルは固有値だけからなり

$$\sigma(N_{\rm b}) = \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{6.47}$$

が成り立つ．この構造の故に，$N_{\rm b}$ は**ボソン個数作用素** (number operator) と呼ばれる．特に，$N_{\rm b}$ は非負の自己共役作用素である．作用素解析により，任意の $p > 0$ に対して，$N_{\rm b}$ の p 乗 $N_{\rm b}^p$ は次の形をとる：

$$D(N_{\rm b}^p) = \left\{ \psi \in \mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}) \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \left\| \psi^{(n)} \right\|^2 < \infty \right\}, \tag{6.48}$$

$$(N_{\rm b}^p \psi)^{(n)} = n^p \psi^{(n)}, \quad n \geq 0,\ \psi \in D(N_{\rm b}^p) \tag{6.49}$$

個数作用素を用いると，生成作用素と消滅作用素に関する不等式が導かれる：

【命題 6.6】　すべての $f \in \mathcal{K}$ と $\psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ に対して，$\psi \in D(a(f)) \cap D(a(f)^*)$ であり，次の不等式が成り立つ：

$$\|a(f)^*\psi\| \leq \|f\| \left\| (N_{\rm b}+1)^{1/2}\psi \right\|, \tag{6.50}$$

$$\|a(f)\psi\| \leq \|f\| \left\| N_{\rm b}^{1/2}\psi \right\|. \tag{6.51}$$

証明　生成作用素の性質から，$(a(f)^*\psi)^{(0)} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n \left\| S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}) \right\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \|f\|^2 \left\| \psi^{(n-1)} \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|^2 \left\| ((N_{\rm b}+1)^{1/2}\psi)^{(n-1)} \right\|^2 = \|f\|^2 \left\| (N_{\rm b}+1)^{1/2}\psi \right\|^2.\end{aligned}$$

したがって，$\psi \in D(a(f)^*)$ であり，(6.50) が成り立つ．

(6.20) によって

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left\| a_n(f)\psi^{(n+1)} \right\|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|f\|^2 \left\| \psi^{(n+1)} \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f\|^2 \left\| (N_{\rm b}^{1/2}\psi)^{(n+1)} \right\|^2 = \|f\|^2 \left\| N_{\rm b}^{1/2}\psi \right\|^2.\end{aligned}$$

したがって，$\psi \in D(a(f))$ であり，(6.51) が成り立つ．　∎

【命題 6.7】 （試験ベクトルに関する連続性）$f_n, f \in \mathcal{K}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ならば，任意の $\psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a(f_n)\psi = a(f)\psi, \quad \lim_{n\to\infty} a(f_n)^*\psi = a(f)^*\psi \tag{6.52}$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}\|a(f_n)\psi - a(f)\psi\| &= \|a(f_n - f)\psi\| \\ &\leq \|f_n - f\| \|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\| \quad (\because (6.51)) \\ &\to 0 \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

$a(f_n)^*\psi$ についても同様． ∎

この命題から重要な帰結が導かれる：

【定理 6.8】 T を $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素とし，$f \in D(T^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $\psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ とする．このとき，$a^{\#}\big(e^{itT}f\big)\psi$ は t について n 回強微分可能であり

$$\frac{d^n}{dt^n} a\big(e^{itT}f\big)\psi = (-i)^n a\big(T^n e^{itT} f\big)\psi, \tag{6.53}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} a\big(e^{itT}f\big)^*\psi = i^n a\big(T^n e^{itT} f\big)^*\psi, \tag{6.54}$$

が成り立つ．ただし，微分は強微分の意味でとる．

証明 n に関する帰納法で証明する．$f \in D(T)$ とし，$\phi(t) = a\big(e^{itT}f\big)\psi$ とおく．このとき，$s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{\phi(t+s) - \phi(t)}{s} = a(u_s)\psi - ia\big(T\,e^{itT}f\big)\psi$$

と書ける．ただし

$$u_s = e^{itT}\left(\frac{e^{isT} - 1}{s} - iT\right) f.$$

$f \in D(T)$ であるから，作用素解析により，$\lim_{s\to 0} u_s = 0$ となる．したがって，命題 6.7 により，$\lim_{s\to 0} a(u_s)\psi = 0$．ゆえに，$\phi(t)$ は t について強微分可能であり，$n = 1$ の場合の (6.53) が成立する．

次に，$a\big(e^{itT}f\big)\psi$ に関する主張が n で成立したとし，$f \in D(T^{n+1})$ として

$$\phi_n(t) = (-i)^n a\big(T^n e^{itT} f\big)\psi$$

とおく．$i^n T^n f = g$ とおけば $g \in D(T)$ であり，$\phi_n(t) = a\big(e^{itT}g\big)\psi$ と書ける．したがって，前段の結果により，$\phi_n(t)$ は t について強微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\phi_n(t) = -ia\big(T\,e^{itT}g\big)\psi = (-i)^{n+1}a\big(T^{n+1}e^{itT}f\big)\psi$$

が成り立つ．よって，主張は $n+1$ のときも成立する．(6.54) についても同様．

∎

6.5　シーガル場

生成作用素と消滅作用素からつくられる自然な作用素の1つは $S_f := a(f)^* + a(f)$ $(f \in \mathcal{K})$ である．命題 6.1-(ii) と命題 6.3-(i) によって，この作用素の定義域 $D(S_f) = D(a(f)^*) \cap D(a(f))$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を含む．したがって，$D(S_f)$ は稠密である．この事実と $\langle\psi, S_f\psi\rangle \in \mathbb{R}, \forall\psi \in D(S_f)$ により，S_f は対称作用素であることがわかる．したがって，それは可閉である．そこで，S_f の閉包 $\bar{S}_f$ を $1/\sqrt{2}$ 倍した作用素

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(a(f)^* + a(f))}, \quad f \in \mathcal{K} \tag{6.55}$$

を定義し，これを**シーガル場の作用素**あるいは単に**シーガル場**と呼ぶ[6]．次の定理は，シーガル場の基本的性質をまとめたものである：

【定理 6.9】　$\mathcal{D}$ を $\mathcal{K}$ の部分空間とする．

(i) 各 $f \in \mathcal{K}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で交換関係

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \tag{6.56}$$

が成り立つ．

---

[6] 定数因子 $1/\sqrt{2}$ は，後に述べる結果を見越して選ばれた定数であり，便宜的なものである．

(ii) 各 $f \in \mathcal{D}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ 上で交換関係

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \tag{6.57}$$

が成り立つ．

(iii) 各 $f \in \mathcal{K}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は自己共役であり，すべての $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ に対して

$$e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{i^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi}{n!} \tag{6.58}$$

が成り立つ．

(iv) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，各 $f \in \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の芯である[7]．

(v) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，$\mathcal{L}(\{\Omega, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\})$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．

(vi) 任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して，$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset D(\Phi_{\mathrm{S}}(f))$ であり

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\psi\| \leq \sqrt{2}\|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\|, \quad \psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \tag{6.59}$$

が成り立つ．

証明 (i) 定義から，任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f)^* + a(f))\psi, \quad \forall\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}). \tag{6.60}$$

これと定理 6.4-(ii) により，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にすることがわかる．さらに，(6.35)〜(6.37) を使えば，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で

$$\begin{aligned}
&[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] \\
&= \frac{1}{2}\{[a(f)^*, a(g)^*] + [a(f)^*, a(g)] + [a(f), a(g)^*] + [a(f), a(g)]\} \\
&= \frac{1}{2}(-\langle g, f\rangle + \langle f, g\rangle) = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle
\end{aligned}$$

と計算される．

---

[7] $f \in \mathcal{D}$ という条件に注意．

(ii) 定理 6.4-(i) を用いて，(i) と同様に議論を行えばよい．

(iii) まず，(6.58) の右辺が収束することを示す．すなわち，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して定義されるベクトル

$$\chi_N := \sum_{n=0}^{N} t^n \frac{i^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi}{n!}$$

が $N \to \infty$ のとき，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で収束することを示す．そのためには

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi\|}{n!} < \infty$$

を示せばよい．シーガル場の定義から

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{2^n \text{ 項の和}} \underbrace{a^{\#}(f) \cdots a^{\#}(f)}_{n \text{ 個}} \psi.$$

いま，$\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって，$n > n_0$ ならば $\psi^{(n)} = 0$ である．したがって，$\big(\underbrace{a^{\#}(f) \cdots a^{\#}(f)}_{n \text{ 個}} \psi\big)^{(m)} = 0$, $m > n + n_0$．この事実と命題 6.6 により

$$\begin{aligned}
\|\underbrace{a^{\#}(f) \cdots a^{\#}(f)}_{n \text{ 個}} \psi\| &\leq \sqrt{n + n_0} \|f\| \|\underbrace{a^{\#}(f) \cdots a^{\#}(f)}_{(n-1) \text{ 個}} \psi\| \\
&\leq \sqrt{n + n_0} \sqrt{n - 1 + n_0} \|f\| \|\underbrace{a^{\#}(f) \cdots a^{\#}(f)}_{(n-2) \text{ 個}} \psi\| \\
&\leq \cdots \\
&\leq \sqrt{(n + n_0)(n - 1 + n_0) \cdots (n_0 + 1)} \|f\|^n \|\psi\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t|^n \frac{\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{\sqrt{(n + n_0)!}}{n!} |t|^n \|f\|^n \|\psi\|.$$

ダランベールの判定法により，右辺の級数は収束することがわかる．したがって

$$\chi := \lim_{N \to \infty} \chi_N = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{i^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \psi}{n!}$$

は存在する．これは，ψ が $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の解析ベクトルであることを意味する．すでに見たように，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にしているから，付録 C の定理 C.13 により，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で本質的に自己共役である．したがって，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は自己共役である．この事実と作用素解析により，$\chi = e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\psi$ となる[8].

(iv) (iii) によって，任意の $f \in \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ の任意のベクトルも $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の解析ベクトルであり，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ を不変にする．また，$\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密なので，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．したがって，再び，付録 C の定理 C.13 によって，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ 上で本質的に自己共役である．すなわち，それは，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の芯である．

(v) 任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$a(f)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) - i\Phi_{\mathrm{S}}(if)) \quad (\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K}) \text{ 上}) \tag{6.61}$$

と書ける．したがって

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\{\Omega, a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}) \\ &\quad \subset \mathcal{L}(\{\Omega, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1) \cdots \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D},\ j = 1, \cdots, n\}).\end{aligned}$$

定理 6.4-(iv) によって，左辺の集合は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密であるから，題意が成立する．

(vi) 命題 6.6 による（$\left\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\right\| \le \left\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\right\|$ に注意）． ∎

定理 6.9 から，ユニタリ作用素 $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ が有する重要な代数的構造が導かれる：

【定理 6.10】 $f, g \in \mathcal{K}$ は任意とする．

(i) 任意の $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ に対して $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\psi \in D\big(a^{\#}(g)\big)$ であり

$$a^{\#}(g)e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} a^{\#}(g)\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\psi \tag{6.62}$$

---

[8] 一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 A とベクトル $u \in \mathcal{K}$ に対して，$u_A := \sum_{n=0}^{\infty} i^n A^n u/n!$ が収束すれば，$u_A = e^{iA}u$ である．**（証明）** E_A を A のスペクトル測度とすれば，任意の $v \in \mathcal{K}$ と $R > 0$ に対して，$\langle E_A([-R,R])v, u_A\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle \sum_{n=0}^{N} \frac{(-i)^n}{n!} A^n E_A([-R,R])v, u\right\rangle$. 作用素解析により，$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-i)^n A^n}{n!}E_A([-R,R])v = e^{-iA}E_A([-R,R])v$. したがって，$\langle E_A([-R,R])v, e^{iA}u\rangle = \langle E_A([-R,R])v, u_A\rangle$. そこで，$R \to \infty$ とすれば，$\langle v, e^{iA}u\rangle = \langle v, u_A\rangle$. ゆえに，$e^{iA}u = u_A$.

が成り立つ．

(ii) $e^{i\Phi_S(f)}D\big(a^{\#}(g)\big) = D\big(a^{\#}(g)\big)$ であり作用素の等式

$$e^{i\Phi_S(f)}a(g)\,e^{-i\Phi_S(f)} = a(g) - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle g, f\rangle\,, \tag{6.63}$$

$$e^{i\Phi_S(f)}a(g)^* e^{-i\Phi_S(f)} = a(g)^* + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle f, g\rangle \tag{6.64}$$

が成り立つ．さらに，$g \neq 0$ ならば

$$\sigma(a(g)) = \sigma_{\mathrm{p}}(a(g)) = \mathbb{C}, \tag{6.65}$$

$$\sigma(a(g)^*) = \mathbb{C}. \tag{6.66}$$

(iii) $e^{i\Phi_S(f)}D(\Phi_S(g)) = D(\Phi_S(g))$ であり作用素の等式

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g)\,e^{-i\Phi_S(f)} = \Phi_S(g) - \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \tag{6.67}$$

が成り立つ．特に，$g \neq 0$ ならば

$$\sigma(\Phi_S(g)) = \mathbb{R}. \tag{6.68}$$

(iv) **(ヴァイル関係式)**

$$e^{i\Phi_S(f)}\,e^{i\Phi_S(g)} = e^{-i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle}\,e^{i\Phi_S(g)}\,e^{i\Phi_S(f)}. \tag{6.69}$$

(v)
$$e^{i\Phi_S(f+g)} = e^{i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle/2}\,e^{i\Phi_S(f)}\,e^{i\Phi_S(g)}. \tag{6.70}$$

(vi) $\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle = 0$ ならば，$\Phi_S(f)$ と $\Phi_S(g)$ は強可換である[9]．

証明　(i) 定理 6.9-(iii) によって，$\eta_N := \sum_{n=0}^N i^n\Phi_S(f)^n\psi/n!$ とおけば，$\eta_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ であり，$\lim_{N\to\infty}\eta_N = e^{i\Phi_S(f)}\psi$ が成り立つ．定理 6.9-(iii) の証明と同様にして，$\{a^{\#}(g)\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ はコーシー列であることがわかる．この事実と $a^{\#}(g)$ の閉性により，$e^{i\Phi_S(f)}\psi \in D(a^{\#}(g))$ かつ (6.62) が成り立つ．

(ii) 一般に，$\mathfrak{A}$ を結合的代数とするとき，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ と $A \in \mathfrak{A}$ に対して，写像 $\mathrm{ad}^n A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ を帰納的に次のように定義する：

$$(\mathrm{ad}^0 A)B := B, \quad (\mathrm{ad}^n A)B := [A, (\mathrm{ad}^{n-1}A)B], \quad n \geq 1. \tag{6.71}$$

[9] 強可換性の定義については，付録 C，C.3 節を参照．

写像 $\mathrm{ad}^n A$ は A に関する**随伴作用素**と呼ばれる．この作用素に関して次の式が成立する：

$$(\mathrm{ad}^n A)B = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(-1)^r A^{n-r} B A^r \tag{6.72}$$

ただし，${}_nC_r = n!/(n-r)!\,r!$ は 2 項係数である．証明は n に関する帰納法によれば容易である[10].

さて，任意の $\psi, \phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ に対して (i) により

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} a(g)\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \psi \right\rangle \\
&= \left\langle e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \phi, a(g)\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \psi \right\rangle \\
&= \sum_{n,r=0}^{\infty} \frac{i^n(-i)^r}{n!r!} \langle \phi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)^n a(g) \Phi_{\mathrm{S}}(f)^r \psi \rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \sum_{r=0}^{N} {}_NC_r(-1)^r \left\langle \phi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)^{N-r} a(g) \Phi_{\mathrm{S}}(f)^r \psi \right\rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \left\langle \phi, (\mathrm{ad}^N \Phi_{\mathrm{S}}(f)) a(g) \psi \right\rangle.
\end{aligned}$$

ここで，最後の等式を得るのに (6.72) を用いた（$A = \Phi_{\mathrm{S}}(f)$, $B = a(g)$ の場合）．容易にわかるように

$$\big(\mathrm{ad}^1 \Phi_{\mathrm{S}}(f)\big) a(g) \psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle g, f \rangle \psi.$$

したがって

$$\big(\mathrm{ad}^N \Phi_{\mathrm{S}}(f)\big) a(g) \psi = 0, \quad N \geq 2.$$

ゆえに

$$\left\langle \phi, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} a(g)\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \psi \right\rangle = \left\langle \phi, \left(a(g) - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle g, f \rangle \right) \psi \right\rangle.$$

$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ は稠密であるから，これは

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} a(g)\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \psi = \left(a(g) - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle g, f \rangle \right) \psi$$

---

[10] この際，2 項係数に関する公式

$${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

が使用される．

を意味する．定理 6.4-(v) によって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ は $a(g)$ の芯である．したがって，$D(a(g))$ 上で (6.63) が成り立つ．(i) により，$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}D(a(g)) \subset D(a(g))$ であるから，$D(a(g)) \subset e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}D(a(g))$．(i) で f のかわりに $-f$ を考えれば $e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}D(a(g)) \subset D(a(g))$．したがって，$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}D(a(g)) = D(a(g))$．ゆえに作用素の等式として (6.63) が成立する．(6.64) は (6.63) の共役を考察することにより導かれる（または，$a(g)$ の場合と同様の議論を行う）．

(6.63) と (6.30) により，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$u_g(z) := e^{-i\sqrt{2}\Phi_{\mathrm{S}}(izg)/\|g\|^2}\Omega$ とすれば，$\|u_g(z)\| = 1$ かつ

$$a(g)u_g(z) = zu_g(z)$$

が成り立つ．したがって，(6.65) が成立する．

(6.64) とスペクトルのユニタリ不変性により

$$\begin{aligned}\sigma(a(g)^*) &= \sigma(a(g)^* + i\langle f, g\rangle/\sqrt{2}) \\ &= \{\lambda + i\langle f, g\rangle/\sqrt{2} \mid \lambda \in \sigma(a(g)^*)\}, \quad \forall f \in \mathcal{K}.\end{aligned}$$

ここで，$0 \in \sigma(a(g)^*)$ に注意する（∵ 仮に $0 \in \rho(a(g)^*)$ とすれば，あるベクトル $\psi \in D(a(g)^*)$ で $a(g)^*\psi = \Omega$ を満たすものがある．だが，この場合，$(a(g)^*\psi)^{(0)} = 0 \neq 1 = \Omega^{(0)}$ となるので矛盾）．したがって

$$\sigma(a(g)^*) \supset \{i\langle f, g\rangle/\sqrt{2} \mid f \in \mathcal{K}\}.$$

特に，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$f = \sqrt{2}iz^*/\|g\|^2$ ととれば，（右辺）$\supset \{z \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$ となるので，(6.66) が得られる．

(iii) (ii) より，まず，(6.67) が $\mathcal{F}_{\mathrm{b,0}}(\mathcal{K})$ 上で成り立つことがわかる．定理 6.9-(iv) によって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,0}}(\mathcal{K})$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ の芯である．したがって，(6.63) の場合の証明の場合と同様の議論により，作用素の等式としての (6.67) が導かれる．

(6.67) で $f = itg/\|g\|^2$ ($t \in \mathbb{R}$ は任意）とし，スペクトルのユニタリ不変性を用いると

$$\sigma(\Phi_{\mathrm{S}}(g)) = \sigma(\Phi_{\mathrm{S}}(g) + t).$$

$\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ は自己共役であるから $\sigma(\Phi_{\mathrm{S}}(g)) \neq \emptyset$ であり，$t \in \mathbb{R}$ は任意であったから (6.68) を得る．

(iv) (iii) により，$\exp\left(i\, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Phi_{\mathrm{S}}(g)\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\right) = \exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(g) - i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle)$. 作用素解析のユニタリ共変性（付録 C の定理 C.4 を参照）により，左辺は $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)}\, e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ に等しい．ゆえに (6.69) が成立する．

(v) 任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ に対して

$$F(t) := e^{-it^2 \mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle/2}\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)}\psi,$$
$$G(t) := e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(g)}\psi$$

とおく．F, G は t について強微分可能であり

$$F'(t) = (-it\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle + i\Phi_{\mathrm{S}}(f+g))F(t),$$
$$G'(t) = i\Phi_{\mathrm{S}}(f)G(t) + i\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Phi_{\mathrm{S}}(g)\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(g)}\psi.$$

$G'(t)$ を変形するために，(6.67) を用いると

$$e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Phi_{\mathrm{S}}(g) = (\Phi_{\mathrm{S}}(g) - \mathrm{Im}\,\langle tf, g\rangle)\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$$

となるから

$$G'(t) = (-it\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle + i\Phi_{\mathrm{S}}(f+g))G(t)$$

が成立する．したがって，F と G は同じ微分方程式を満たす．しかも $F(0) = G(0) = \psi$ である．ゆえに，付録 C の定理 C.11 によって，$F(t) = G(t)$ が結論される．$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ は稠密であるから，(6.70) が成立する．

(vi) 仮定の条件のもとで，(iv) により，すべての $t, s \in \mathbb{R}$ に対して $e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \times e^{is\Phi_{\mathrm{S}}(g)} = e^{is\Phi_{\mathrm{S}}(g)}\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ が成り立つ．これと一般的判定条件（付録 C，定理 C.6）により，題意が成立する． ∎

消滅作用素と生成作用素のスペクトル特性—(6.65) と (6.66)—は注目に値する．この事実とともに，それらの和のスカラー倍の閉包として定義されるシーガル場のスペクトルが $\mathbb{R}$ 全体になるのは，線形作用素のスペクトル理論の観点からもたいへん興味深い[11]．後に見るように，シーガル場のこのスペクトル特性は，量子力学への応用においては，古典場の理論における実スカラー場—実数値をとる時空上の関数—の量子版としてシーガル場を用いる根拠の1つを提供する．

[11] シーガルの場は自己共役であるから，そのスペクトルが $\mathbb{R}$ の閉部分集合であることは，一般論からただちにわかる．

次の定理は，ユニタリ作用素 $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ $(f \in \mathcal{K})$ のボソンフォック真空への作用の構造を明らかにする：

【定理 6.11】 任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega = e^{-\|f\|^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^{n/2}n!}(a(f)^*)^n\Omega. \tag{6.73}$$

証明 任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$F(t) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ を

$$F(t) := e^{t^2\|f\|^2/4}\, e^{it\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega$$

によって定義する．このとき，$F(t)$ は t について強微分可能であり

$$F'(t) = \left(\frac{t}{2}\|f\|^2 + i\Phi_{\mathrm{S}}(f)\right)F(t)$$

が成り立つ．他方

$$G(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{2^{n/2}n!}(a(f)^*)^n\Omega$$

とおけば，これも t について強微分可能であり

$$G'(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}a(f)^*G(t) \tag{6.74}$$

が成り立つ．(6.30) と (6.36) を用いると

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{2^{n/2}n!}(a(f)^*)^n a(f)\Omega = -\frac{it}{\sqrt{2}}\|f\|^2G(t) + a(f)G(t)$$

この式の両辺に $i/\sqrt{2}$ をかけて，(6.74) の右辺に加えると

$$G'(t) = \left(\frac{t}{2}\|f\|^2 + i\Phi_{\mathrm{S}}(f)\right)G(t)$$

が得られる．したがって，F と G は同じ微分方程式を満たし，初期条件も等しい：$F(0) = G(0) = \Omega$．ゆえに，付録 C の定理 C.11 を応用することにより，$F(t) = G(t), \forall t \in \mathbb{R}$ が成り立つ． ∎

6.6 正準交換関係の表現

ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の共役子 C を任意に1つ選ぶ．すなわち，C は $\mathcal{K}$ 上の写像で (i) 反線形性：$C(\alpha f+\beta g)=\alpha^* C(f)+\beta^* C(g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $f,g\in\mathcal{K}$ と (ii) 等距離性：$\|Cf\|=\|f\|, f\in\mathcal{K}$ および (iii) （2次の巡回性）$C^2=I$（恒等作用素）を満たすものである．このとき，偏極恒等式を用いることにより任意の $f,g\in\mathcal{K}$ に対して

$$\langle C(f),C(g)\rangle=\langle g,f\rangle \tag{6.75}$$

が成り立つことが示される．したがって，特に，f,g が $C(f)=f$, $C(g)=g$ を満たすならば，$\langle f,g\rangle$ は実数である．ゆえに $\mathcal{K}$ の部分集合

$$\mathcal{K}_C:=\{f\in\mathcal{K}\mid C(f)=f\} \tag{6.76}$$

は $\mathcal{K}$ の内積で実ヒルベルト空間になる．各 $f\in\mathcal{K}$ に対して

$$f_{\rm re}:=\frac{f+C(f)}{2},\quad f_{\rm im}:=\frac{f-C(f)}{2i} \tag{6.77}$$

とすれば，$f_{\rm re},f_{\rm im}\in\mathcal{K}_C$ であり

$$f=f_{\rm re}+if_{\rm im} \tag{6.78}$$

が成り立つ．この表示は一意的である．すなわち，$f=u+iv$ となる $u,v\in\mathcal{K}_C$ があったとすれば，$u=f_{\rm re}, v=f_{\rm im}$ となる[12]．ベクトル $f_{\rm re},f_{\rm im}$ をそれぞれ，C に関する f の**実部**，**虚部**と呼ぶ．

各 $f\in\mathcal{K}_C$ に対して，2つの自己共役作用素

$$\phi_C(f):=\Phi_{\rm S}(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(a(f)^*+a(f))}, \tag{6.79}$$

$$\pi_C(f):=\Phi_{\rm S}(if)=\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{(a(f)^*-a(f))} \tag{6.80}$$

を定義する．定理 6.9 から次の定理が得られる：

[12] $C(f)=u-iv$ となるので，$f+C(f)=2u$, $f-C(f)=2iv$ である．

【定理 6.12】 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{K}$ の部分空間で $C(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ を満たすものとし（したがって，実は $C(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$）

$$\mathcal{D}_C := \mathcal{D} \cap \mathcal{K}_C \tag{6.81}$$

とおく．

(i) 各 $f \in \mathcal{K}_C$ に対して，$\phi_C(f), \pi_C(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ を不変にする．さらに，すべての $f, g \in \mathcal{K}_C$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で交換関係

$$[\phi_C(f), \phi_C(g)] = 0, \tag{6.82}$$

$$[\phi_C(f), \pi_C(g)] = i \langle f, g \rangle, \tag{6.83}$$

$$[\pi_C(f), \pi_C(g)] = 0 \tag{6.84}$$

が成り立つ．

(ii) 各 $f \in \mathcal{D}_C$ に対して，$\phi_C(f), \pi_C(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ 上で交換関係 (6.82)〜(6.84) が成り立つ．

(iii) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，各 $f \in \mathcal{D}_C$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $\phi_C(f), \pi_C(f)$ の芯である．

(iv)

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}(\{\Omega, \phi_C(f_1) \cdots \phi_C(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D}_C,\ j = 1, \cdots, n\}), \tag{6.85}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}(\{\Omega, \pi_C(f_1) \cdots \pi_C(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D}_C,\ j = 1, \cdots, n\}). \tag{6.86}$$

特に $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば

$$\mathcal{L}(\{\Omega, \phi_C(f_1) \cdots \phi_C(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D}_C,\ j = 1, \cdots, n\})$$

および

$$\mathcal{L}(\{\Omega, \pi_C(f_1) \cdots \pi_C(f_n)\Omega \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{D}_C,\ j = 1, \cdots, n\})$$

は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．

(v) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，$\mathcal{L}\big(\big\{e^{i\phi_C(f)}\Omega \mid f \in \mathcal{D}_C\big\}\big)$ と $\mathcal{L}\big(\big\{e^{i\pi_C(f)}\Omega \mid f \in \mathcal{D}_C\big\}\big)$ はそれぞれ，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密である．

(vi) (**強可換性**) 任意の $f, g \in \mathcal{K}_C$ に対して，$\phi_C(f)$ と $\phi_C(g)$ は強可換であり，$\pi_C(f)$ と $\pi_C(g)$ も強可換である．

証明 (i)〜(iii) は定理 6.9 の (i)〜(iii) を $\phi_C(f), \pi_C(f)$ を用いて言い換えたものにすぎない．そこで (iv) と (v) だけを証明する．

(iv) 任意の $f_j \in \mathcal{D}_C$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で

$$\phi_C(f_1) \cdots \phi_C(f_n) = \frac{1}{2^{n/2}} a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* + \frac{1}{2^{n/2}} R_n \tag{6.87}$$

と書ける．ただし

$$R_n := \sum_{(2^n-1)\ \text{項にわたる和}} a^{\#}(f_1) \cdots a^{\#}(f_n)$$

であり，$a^{\#}(f_1) \cdots a^{\#}(f_n)$ に含まれる生成作用素の個数は $(n-1)$ 個以下である．交換関係 (6.36) を用いると，$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で

$$\begin{aligned} &a(f)a(g_1)^* \cdots a(g_m)^* \\ &\quad = \sum_{j=1}^{m} \langle f, g \rangle\, a(g_1)^* \cdots \widehat{a(g_j)^*} \cdots a(g_m)^* + a(g_1)^* \cdots a(g_m)^* a(f), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f, g_j \in \mathcal{K},\ j = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{6.88}$$

が成り立つことがわかる．これと (6.30) によって

$$\begin{aligned} a(f)a(g_1)^* \cdots a(g_m)^*\Omega &= \sum_{j=1}^{m} \langle f, g \rangle\, a(g_1)^* \cdots \widehat{a(g_j)^*} \cdots a(g_m)^*\Omega, \\ &\qquad\qquad f, g_j \in \mathcal{K},\ j = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{6.89}$$

となる．これは，つまり，生成作用素と消滅作用素の積をボソンフォック真空に作用させたものは，必ず，生成作用素の積だけをボソンフォック真空に作用させて得られるベクトルの線形結合で表されることを意味する．ゆえに，$R_n\Omega$ は $(n-2)$ 個以下（0 個の場合も含める）の生成作用素の積を Ω に作用させて得られるベクトルの線形結合として表される．(6.87) より

$$a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega = 2^{n/2}\phi_C(f_1) \cdots \phi_C(f_n) - R_n\Omega.$$

次に $R_n\Omega$ に含まれる $a(h_1)^* \cdots a(h_k)^*\Omega$ $(h_j \in \mathcal{D}_C, 1 \leq k \leq n-2)$ という形の

ベクトルのうち，積の次数が最も高い $k=n-2$ の場合について，いまの議論を適用すれば

$$R_n\Omega=\sum_{(h_1,\cdots,h_{n-2})}\alpha_{h_1,\cdots,h_{n-2}}\phi_C(h_1)\cdots\phi_C(h_{n-2})\Omega+R_n'\Omega$$

という形に表される．ただし，$\alpha_{h_1,\cdots,h_{n-2}}$ は定数であり，$R_n'\Omega$ は $(n-4)$ 個以下の生成作用素の積を Ω に作用させて得られるベクトルの線形結合である．以下同様にして，生成作用素の積に関する逓減を行うことにより，$a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega$ は $\phi_C(f_1),\cdots,\phi_C(f_n)$ の中の k 個の積 $(k=n,n-2,n-4,\cdots)$ を Ω に作用させて得られるベクトルの線形結合として表される．したがって

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\{a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \mid f_j\in\mathcal{D}_C,\ j=1,\cdots,n\})\\&\quad\subset\mathcal{L}(\{\phi_C(f_1)\cdots\phi_C(f_n)\Omega \mid f_j\in\mathcal{D}_C,\ j=1,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{F}_0:=\mathcal{L}(\{\Omega,\phi_C(f_1)\cdots\phi_C(f_n)\Omega \mid n\in\mathbb{N},\ f_j\in\mathcal{D}_C,\ j=1,\cdots,n\})$ とおけば

$$\mathcal{L}(\{\Omega,a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \mid n\in\mathbb{N},\ f_j\in\mathcal{D}_C,\ j=1,\cdots,n\})\subset\mathcal{F}_0$$

が成立する．$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ 上で $a(f)^*=a(f_{\mathrm{re}})^*+ia(f_{\mathrm{im}})^*$ であるから，左辺は

$$\mathcal{L}(\{\Omega,a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \mid n\in\mathbb{N},\ f_j\in\mathcal{D},\ j=1,\cdots,n\})=\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$$

に等しい（$C(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}$ から，$f\in\mathcal{D}$ ならば $f_{\mathrm{re}},f_{\mathrm{im}}\in\mathcal{D}_C$ が導かれることに注意)．したがって $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})\subset\mathcal{F}_0$．(6.89) を用いることにより，逆の包含関係も示される．ゆえに (6.85) が成立する．同様にして，(6.86) も示される．$\mathcal{D}$ が $\mathcal{K}$ で稠密ならば，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密であるから，$\mathcal{F}_0$ の $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ での稠密性が出る．$\mathcal{L}(\{\Omega,\pi_C(f_1)\cdots\pi_C(f_n)\Omega \mid n\in\mathbb{N},\ f_j\in\mathcal{D}_C,\ j=1,\cdots,n\})$ の稠密性についても同様である．

(v) 一般に，ヒルベルト空間の空でない部分集合 $\mathcal{M}$ の直交補空間を $\mathcal{M}^\perp$ と表記する．$\psi\in\left(\mathcal{L}\left(\left\{e^{i\phi_C(f)}\Omega \mid f\in\mathcal{D}_C\right\}\right)\right)^\perp$ としよう．このとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ と $t_j\in\mathbb{R}$, $f_j\in\mathcal{D}_C$ $(j=1,2,\cdots,n)$ に対して

$$\left\langle\psi,e^{i\phi_C(\sum_{j=1}^n t_jf_j)}\Omega\right\rangle=0.$$

いま，$\langle f_j, f_k\rangle \in \mathbb{R}$ であるから，(6.70) によって，$e^{i\phi_C(\sum_{j=1}^n t_j f_j)} = \prod_{j=1}^n e^{it_j\phi_C(f_j)}$．したがって

$$\left\langle \psi, e^{it_1\phi_C(f_1)} \cdots e^{it_j\phi_C(f_j)}\Omega \right\rangle = 0. \tag{6.90}$$

ベクトル $e^{it_1\phi_C(f_1)} \cdots e^{it_j\phi_C(f_j)}\Omega$ が $t_1, \cdots, t_n$ について強微分可能であることは容易にわかる．そこで，(6.90) を各 t_j について微分し，$t_j = 0,\ j = 1, \cdots, n$，とすれば

$$\langle \psi, \phi_C(f_1) \cdots \phi_C(f_n)\Omega\rangle = 0$$

が得られる．したがって，(iv) によって，$\psi = 0$ である．ゆえに題意が成立する．

(vi) $f, g \in \mathcal{K}_C$ ならば，$\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle = 0$ であるから，定理 6.10-(vi) によって $\phi_C(f) = \Phi_\mathrm{S}(f)$ と $\phi_C(g) = \Phi_\mathrm{S}(g)$ は強可換である．また，$\mathrm{Im}\,\langle if, ig\rangle = \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle = 0$ であるから，同様に，$\pi_C(f) = \Phi_\mathrm{S}(if)$ と $\pi_C(g) = \Phi_\mathrm{S}(ig)$ は強可換である． ∎

交換関係 (6.82)～(6.84) を**正準交換関係** (canonical commutation relations; CCR と略）と呼ぶ．

ここに登場した CCR は，実は，無限自由度の量子力学の原理の 1 つとみなされる，ある一般的な概念の一例にすぎない．それは次のように定義される：

【定義 6.13】 $\mathcal{V}$ を実内積空間とし，$\{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{V}\}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{F}$ 上の対称作用素の族とする．もし，$\mathcal{F}$ の部分空間 $\mathcal{E}$（$\mathcal{F}$ で稠密とは限らない）があって，次の条件が満たされるならば，$(\mathcal{F}, \mathcal{E}, \{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{V}\})$ を **$\mathcal{V}$ を添え字集合とする CCR の表現**と呼ぶ：

(CCR.1) $\mathcal{E} \subset \cap_{f\in\mathcal{V}} D(\phi(f)) \cap D(\pi(f))$ かつ各 $f \in \mathcal{V}$ に対して，$\phi(f), \pi(f)$ は $\mathcal{E}$ を不変にする：$\phi(f)(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E},\ \pi(f)(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.

(CCR.2)（実線形性） $\mathcal{E}$ 上で $\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$, $\pi(af + bg) = a\pi(f) + b\pi(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{V}$ が成立する．

(CCR.3) $\mathcal{E}$ 上で CCR を満たす：

$$[\phi(f), \phi(g)] = 0, [\phi(f), \pi(g)] = i\langle f, g\rangle, [\pi(f), \pi(g)] = 0, \quad f, g \in \mathcal{V}.$$

この場合，$\pi(f)$ を $\phi(f)$ の**正準共役** (canonical conjugate) という．

特に，各 $f \in \mathcal{V}$ に対して，$\phi(f)$ と $\pi(f)$ が自己共役であるとき，考察下のCCRの表現を**CCRの自己共役表現**という．

いま定義した概念を用いれば，定理6.12-(ii) は次のように言い換えられる：$(\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}),\ \mathcal{F}_{\rm b,fin}(\mathcal{D}),\ \{\phi_C(f),\pi_C(f) \mid f \in \mathcal{D}_C\})$ は $\mathcal{D}_C$ を添え字集合とするCCRの自己共役表現である．この表現を**$\mathcal{D}_C$ を添え字集合とするCCRのフォック表現**と呼ぶ．

$\mathcal{V}$ を添え字集合とするCCRの表現 $(\mathcal{F},\mathcal{E},\{\phi(f),\pi(f) \mid f \in \mathcal{V}\})$ が与えられたとき，任意のヒルベルト空間 $\mathcal{F}'$ とユニタリ変換 $U:\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ に対して

$$\phi'(f) = U\phi(f)U^{-1}, \quad \pi'(f) = U\pi(f)U^{-1} \tag{6.91}$$

とすれば $(\mathcal{F}',U(\mathcal{E}),\{\phi'(f),\pi'(f) \mid f \in \mathcal{V}\})$ も $\mathcal{V}$ を添え字集合とするCCRの表現であることは容易にわかる．だが，このような場合は，(6.91) が成り立つので，それらの2つの表現は本質的に同じものとみなせる[13]．そこで，次の定義を設ける：

【定義6.14】 $(\mathcal{F},\mathcal{E},\{\phi(f),\pi(f) \mid f \in \mathcal{V}\})$ と $(\mathcal{F}',\mathcal{E}',\{\phi'(f),\pi'(f) \mid f \in \mathcal{V}\})$ を $\mathcal{V}$ を添え字集合とするCCRの表現とする．ユニタリ変換 $U:\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ が存在して，作用素の等式 (6.91) が成り立つとき，これら2つの表現は**ユニタリ同値**または単に**同値**であるという[14]．

CCRの表現の概念は，量子場の理論への応用においては，「ボース場の理論における状態のヒルベルト空間は，適当な実内積空間を添え字集合とするCCRの自己共役表現が実現されるヒルベルト空間である」という原理として使用される．この原理により，すべてのボース場の理論を統一的に把握することが可能になる．無論，この場合，CCRの表現の同値性あるいは非同値性の問題が重要になるが，これについては，本書の範囲を超えるので，これ以上論及することは控える．

✶ 注意6.15　互いに同値にならないCCRの表現の族やフォック表現と同値にならな

[13] ユニタリ変換は作用素の本質的特性（スペクトル，可閉性，閉性，対称性，自己共役性等々）を変えないことに注意．

[14] この定義では，$U(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$ なる条件は課さない．というのは，作用素論的観点からは，表現の作用素のユニタリ同値性が本質的だからである．

い CCR の表現の例は無数に存在する[15]. 表現の非同値性は, 数学的にも物理的にもいろいろな意味で重要な役割を演じる.

✴ 注意 6.16 生成作用素と消滅作用素が満たす交換関係 (6.35)～(6.37) も正準交換関係と呼ばれる場合がある. 同じ「正準交換関係」という言葉を用いても, それを満たす対象をはっきりさせれば混乱は生じないであろう. 明晰さを期するならば, (6.35)～(6.37) のほうは, たとえば,「第二種の正準交換関係」と呼べばよいかもしれない.

6.7 真空期待値

一般に, ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の線形作用素 A がボソンフォック真空 Ω をその定義域に含むならば, Ω と $A\Omega$ の内積 $\langle\Omega, A\Omega\rangle$ が定義される. これを A の**真空期待値**と呼ぶ. 量子場の理論への応用においては, シーガル場の積の真空期待値が重要な役割を演じる. まず, 真空期待値を求める基本公式を証明する. $f, g \in \mathcal{K}$ に対して

$$b(f,g) := a(f) + a(g)^* \tag{6.92}$$

とおく.

【補題 6.17】 すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f_j, g_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, 2n)$ に対して次の式が成立する：

$$\langle\Omega, b(f_1,g_1)\cdots b(f_{2n-1},g_{2n-1})\Omega\rangle = 0, \tag{6.93}$$

$$\langle\Omega, b(f_1,g_1)\cdots b(f_{2n},g_{2n})\Omega\rangle = \sum_{\mathrm{comb}} \langle f_{i_1}, g_{j_1}\rangle \cdots \langle f_{i_n}, g_{j_n}\rangle\,. \tag{6.94}$$

ただし, $\sum_{\mathrm{comb}}$ は $1, \cdots, 2n$ から n 個の相異なる対 $(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)$ (ただし, $i_k < j_k$, $k = 1, \cdots, n$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$) を選ぶすべての仕方 ($(2n)!/n!\,2^n$ 通り) にわたる和を表す[16].

---

[15] 基本的な例の 1 つが, M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* Vol.2 (Academic Press, 1975) の §X.9 で論じられている.

[16] たとえば

$$\langle\Omega, b(f_1,g_1)b(f_2,g_2)\Omega\rangle = \langle f_1, g_2\rangle\,,$$
$$\langle\Omega, b(f_1,g_1)b(f_2,g_2)b(f_3,g_3)b(f_4,g_4)\Omega\rangle$$
$$= \langle f_1, g_2\rangle\langle f_3, g_4\rangle + \langle f_1, g_3\rangle\langle f_2, g_4\rangle + \langle f_1, g_4\rangle\langle f_2, g_3\rangle\,.$$

証明　$m \in \mathbb{N}$ とする．(6.30) により，まず

$$\langle \Omega, b(f_1, g_1) \cdots b(f_m, g_m)\Omega \rangle = \langle \Omega, a(f_1) b(f_2, g_2) \cdots b(f_m, g_m)\Omega \rangle$$

に注意する．交換関係 (6.35) と (6.36) および (6.30) を用いることにより

$$\begin{aligned} & a(f_1) b(f_2, g_2) \cdots b(f_m, g_m)\Omega \\ & \quad = \sum_{j=2}^{n} \langle f_1, g_j \rangle\, b(f_2, g_2) \cdots \widehat{b(f_j, g_j)} \cdots b(f_m, g_m)\Omega \end{aligned} \tag{6.95}$$

と変形できる．したがって

$$\begin{aligned} & \langle \Omega, b(f_1, g_1) \cdots b(f_m, g_m)\Omega \rangle \\ & \quad = \sum_{j=1}^{m} \langle f_1, g_j \rangle \left\langle \Omega, b(f_2, g_2) \cdots \widehat{b(f_j, g_j)} \cdots b(f_m, g_m)\Omega \right\rangle. \end{aligned}$$

これは，m 個の $b(\cdot,\cdot)$ の積の真空期待値が $(m-2)$ 個のそれによって表されることを示す．したがって，m が奇数ならば，右辺は最終的に，1 個の $b(\cdot,\cdot)$ の真空期待値の定数倍の和として表される．他方，(6.30) により

$$\langle \Omega, b(f, g)\Omega \rangle = 0, \quad f, g \in \mathcal{K} \tag{6.96}$$

である．したがって，(6.93) が成立する．

$m = 2n$ とすれば

$$\begin{aligned} & \langle \Omega, b(f_1, g_1) \cdots b(f_{2n}, g_{2n})\Omega \rangle \\ & \quad = \sum_{j=2}^{2n} \langle f_1, g_j \rangle \left\langle \Omega, b(f_2, g_2) \cdots \widehat{b(f_j, g_j)} \cdots b(f_{2n}, g_{2n})\Omega \right\rangle. \end{aligned} \tag{6.97}$$

特に，$n = 1$ の場合

$$\langle \Omega, b((f_1, g_1) b(f_2, g_2)\Omega \rangle = \langle f_1, g_2 \rangle\,. \tag{6.98}$$

したがって，$n = 1$ の場合の (6.94) が成立する．(6.94) における n を $n-1$ に置き換えた式が成立するとすれば，(6.97) によって，(6.94) が導かれる．ゆえに，帰納法により，(6.94) はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する．　∎

【定理 6.18】 すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, 2n)$ に対して次の式が成立する：

$$\langle \Omega, \Phi_S(f_1) \cdots \Phi_S(f_{2n-1})\Omega \rangle = 0, \tag{6.99}$$

$$\langle \Omega, \Phi_S(f_1) \cdots \Phi_S(f_{2n})\Omega \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{comb}} \langle f_{i_1}, f_{j_1} \rangle \cdots \langle f_{i_n}, f_{j_n} \rangle . \tag{6.100}$$

証明 すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\langle \Omega, \Phi_S(f_1) \cdots \Phi_S(f_m)\Omega \rangle = \frac{1}{2^{m/2}} \langle \Omega, b(f_1, f_1) \cdots b(f_m, f_m)\Omega \rangle .$$

これと補題 6.17 により，題意が成立する． ∎

シーガル場 $\Phi_S(f)$ $(f \in \mathcal{K})$ は自己共役であるから，作用素解析により定義される作用素 $e^{i\Phi_S(f)}$ はユニタリ作用素である．このユニタリ作用素の真空期待値も陽に求めることができる：

【定理 6.19】 すべての $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$\left\langle \Omega, e^{i\Phi_S(f)}\Omega \right\rangle = e^{-\|f\|^2/4}. \tag{6.101}$$

証明 (6.58) により

$$\begin{aligned}
\left\langle \Omega, e^{i\Phi_S(f)}\Omega \right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \Omega, \Phi_S(f)^n\Omega \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \langle \Omega, \Phi_S(f)^{2n}\Omega \rangle \\
&\qquad\qquad (\because (6.99)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2n)!}{n!\,2^n} \frac{1}{2^n} \|f\|^{2n} \quad (\because (6.100)) \\
&= e^{-\|f\|^2/4}.
\end{aligned}$$

∎

6.8 ボソンフォック空間上の第2量子化作用素

$\mathcal{K}$ を複素ヒルベルト空間，$\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$ を $\mathcal{K}$ 上のボソンフォック空間とし，このボソンフォック空間上の生成作用素と消滅作用素をそれぞれ，$a(f)^*$, $a(f)$ $(f \in \mathcal{K})$ とする．また，シーガル場を $\Phi_S(f)$ で表す．

この節では，量子場の理論においてシーガル場と並んで重要な役割を演じる作用素を導入する．T を $\mathcal{K}$ 上の稠密に定義された閉作用素（閉線形作用素）とする．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{K}$ 上の恒等作用素 I と T に関するテンソル積演算を用いて定義される $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K}$ 上の線形作用素

$$T_0^{(n)} := \left(\sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\overbrace{T}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \right) \Bigg| \hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n D(T) \tag{6.102}$$

は可閉である[17]．その閉包を $T^{(n)}$ とする：

$$T^{(n)} := \overline{T_0^{(n)}}. \tag{6.103}$$

便宜上，$T^{(0)} := 0$($\mathbb{C}$ 上の作用素）とおく．そこで閉作用素の列 $\left\{T^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ の無限直和

$$d\Gamma(T) := \oplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \tag{6.104}$$

——ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の作用素——を考えるのは自然である．詳しく書けば次のようになる：

$$D(d\Gamma(T)) = \left\{ \psi = \left\{\psi^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty} \,\middle|\, \psi^{(n)} \in D(T^{(n)}), \sum_{n=0}^{\infty} \|T^{(n)}\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}, \tag{6.105}$$

$$(d\Gamma(T)\psi)^{(n)} = T^{(n)}\psi^{(n)}, \quad n \geq 0,\ \psi \in D(d\Gamma(T)). \tag{6.106}$$

作用素 $d\Gamma(T)$ を T の**第 2 量子化作用素**または単に**第 2 量子化**と呼ぶ．この作用素の基本的性質をまとめておく．

【定理 6.20】　T を $\mathcal{K}$ 上の稠密に定義された閉作用素とする．

(i) $d\Gamma(T)$ は閉作用素である．

(ii) T が本質的に自己共役ならば，$d\Gamma(T)$ は自己共役である．

(iii) T が自己共役で非負ならば，$d\Gamma(T)$ も非負の自己共役作用素である．

証明　新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999）の定理 4.22 を参照．　∎

---

[17] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999）の命題 4.11 を参照．

■**例 6.21** 6.4 節で導入した個数作用素 $N_{\rm b}$ は，実は恒等作用素 I の第 2 量子化である：

$$N_{\rm b} = d\Gamma(I). \tag{6.107}$$

これは，$T = I$ の場合，$T^{(n)} = n$（非負整数 n を掛ける作用素）となることによる．

$\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ を複素ヒルベルト空間とし（$\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ の場合も含む），A を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{K}'$ への稠密に定義された閉作用素とする．このとき，テンソル積の一般論によって，各自然数 n に対して，A の n 重テンソル積 $\otimes^n A$ が $\otimes_{\rm s}^n \mathcal{K}$ から $\otimes_{\rm s}^n \mathcal{K}'$ への稠密に定義された閉作用素として構成される．便宜上，$\otimes^0 A := 1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とする．このとき，$\{\otimes^n A\}_{n=0}^{\infty}$ の無限直和

$$\Gamma(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n A \tag{6.108}$$

は $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})$ から $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}')$ への稠密に定義された閉作用素である．定義域と作用を詳しく書けば次のようになる：

$$D(\Gamma(A)) := \left\{ \psi = \left\{\psi^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty} \,\middle|\, \psi^{(n)} \in D(\otimes^n A),\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\|(\otimes^n A)\psi^{(n)}\right\|^2 < \infty \right\}, \tag{6.109}$$

$$(\Gamma(A)\psi)^{(n)} := (\otimes^n A)\psi^{(n)}, \quad \psi \in D(\Gamma(A)),\ n \geq 0. \tag{6.110}$$

作用素 $\Gamma(A)$ を A の**第 2 種の第 2 量子化**と呼ぶ．

明確さを期すために，$\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})$ のボソンフォック真空 Ω を $\Omega_{\mathcal{K}}$ と表そう．$\Gamma(A)$ の定義から容易に見てとれるように

$$\Gamma(A)\Omega_{\mathcal{K}} = \Omega_{\mathcal{K}'} \tag{6.111}$$

が成り立つ．つまり，$\Gamma(A)$ は $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})$ のフォック真空を $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}')$ のそれに移す．

次の定理に述べる事実は基本的である：

【定理 6.22】

(i) $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$，$\|A\| \leq 1$（i.e. A は縮小作用素）ならば $\Gamma(A)$ は有界であり，$\|\Gamma(A)\| \leq 1$ が成り立つ（i.e. $\Gamma(A)$ も縮小作用素）．

(ii) $A, A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}'), n \in \mathbb{N}$ が

$$\|A_n\| \leq 1\ (n \in \mathbb{N}),\ \|A\| \leq 1,\ \text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

を満たすならば

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}\Gamma(A_n)=\Gamma(A). \tag{6.112}$$

(iii) $A\in\mathfrak{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}')$, $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{K}',\mathcal{K}'')$（$\mathcal{K}''$ は複素ヒルベルト空間），$\|A\|\le 1$, $\|B\|\le 1$ ならば

$$\Gamma(B)\Gamma(A)=\Gamma(BA). \tag{6.113}$$

(iv) $A:\mathcal{K}\to\mathcal{K}'$ がユニタリ作用素ならば，$\Gamma(A)$ もユニタリ作用素であり

$$\Gamma(A)^{-1}=\Gamma(A^{-1}) \tag{6.114}$$

が成り立つ．

(v) T が $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素ならば，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\Gamma(e^{itT})=e^{itd\Gamma(T)}, \tag{6.115}$$

$$e^{itd\Gamma(T)}\Omega_{\mathcal{K}}=\Omega_{\mathcal{K}}. \tag{6.116}$$

が成り立つ．

(vi) T が $\mathcal{K}$ 上の非負の自己共役作用素ならば，すべての $\beta>0$ に対して

$$\Gamma(e^{-\beta T})=e^{-\beta d\Gamma(T)}, \tag{6.117}$$

$$e^{-\beta d\Gamma(T)}\Omega_{\mathcal{K}}=\Omega_{\mathcal{K}}. \tag{6.118}$$

が成り立つ．

(vii) A を $\mathcal{K}$ 上の非負の縮小作用素とする．このとき，任意の $\psi\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ に対して

$$\langle\psi,\Gamma(A)\psi\rangle\ge|\langle\Omega_{\mathcal{K}},\psi\rangle|^2.$$

証明　(i) $\|A\|\le 1$ ならば，$\|\otimes^n A\|\le\|A\|^n\le 1$ となるので，すべての $\psi\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ に対して

$$\|\Gamma(A)\psi\|^2\le\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\psi^{(n)}\right\|^2=\|\psi\|^2.$$

したがって，題意が成立する．

(ii) 各 $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\otimes^k A_n-\otimes^k A=(A_n-A)\otimes(\otimes^{k-1}A_n)+A\otimes(A_n-A)\otimes(\otimes^{k-2}A_n)$$

$$+ A \otimes A \otimes (A_n - A) \otimes (\otimes^{k-3} A_n) + \cdots$$
$$+ (\otimes^{k-1} A) \otimes (A_n - A).$$

したがって，任意の $\psi = f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \in \otimes^k \mathcal{K}$ に対して

$$\left\| (\otimes^k A_n - \otimes^k A)\psi \right\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_1\| \cdots \|f_{j-1}\| \|(A_n - A) f_j\| \|f_{j+1}\| \cdots \|f_k\|$$
$$\to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\left\| \otimes^k A_n - \otimes^k A \right\| \leq 2$（$n$ について一様有界）であることと，$\hat{\otimes}^k \mathcal{K}$ が $\otimes^k \mathcal{K}$ で稠密であることを用いると（付録 C，命題 C.2 の応用）

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \otimes^k A_n = \otimes^k A$$

がわかる．したがって，任意の $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(A_n)\psi = \Gamma(A)\psi$$

が示される．$\|\Gamma(A_n)\| \leq 1$ であることと $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{K})$ が $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ で稠密なことを用いれば（再び付録 C，命題 C.2 の応用），(6.112) が得られる．

(iii) テンソル積の一般論からしたがう等式 $(\otimes^n B)(\otimes^n A) = \otimes^n (BA)$ による．

(iv) A がユニタリならば，テンソル積の一般論により，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\otimes^n A$ もユニタリである．したがって，直和作用素の一般論により，$\Gamma(A)$ はユニタリである．

(6.113) により

$$\Gamma(A)\Gamma(A^{-1}) = \Gamma(I_{\mathcal{K}'}) = I_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}')}, \quad \Gamma(A^{-1})\Gamma(A) = I_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})}$$

—集合 S に対して，I_S は S 上の恒等写像を表す—が成り立つ．したがって，(6.114) が成立する．

(v) T が自己共役ならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\otimes^n e^{itT} = e^{itT^{(n)}} \tag{6.119}$$

が成り立つ[18]．したがって

$$\Gamma\left(e^{itT}\right) = \oplus_{n=0}^{\infty} e^{itT^{(n)}} = e^{itd\Gamma(T)}.$$

[18] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』（朝倉書店，1999）の定理 4.20 を参照．

ここで，最後の等号を得るのに，直和作用素に関する一般的事実[19]を用いた．(6.116) はいま得た結果と (6.111)（$\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ の場合）による．

(vi) T が非負の自己共役作用素ならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\beta > 0$ に対して $e^{-\beta T}$ は非負の有界な自己共役作用素であり

$$\otimes^n e^{-\beta T} = e^{-\beta T^{(n)}} \tag{6.120}$$

が成り立つ（証明は (6.119) の場合と同様）．したがって

$$\Gamma\left(e^{-\beta T}\right) = \oplus_{n=0}^{\infty} e^{-\beta T^{(n)}} = e^{-\beta d\Gamma(T)}.$$

(6.118) は (6.116) の場合と同様にして示される．

(vii) $A \geq 0$ ならば $\otimes^n A \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ であるから

$$\begin{aligned}\langle \psi, \Gamma(A)\psi \rangle &= \left\langle \psi^{(0)}, \psi^{(0)} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \psi^{(n)}, (\otimes^n A)\psi^{(n)} \right\rangle \\ &\geq |\psi^{(0)}|^2 = |\langle \Omega_{\mathcal{K}}, \psi \rangle|^2\end{aligned}$$

■

次の定理は生成・消滅作用素と第2量子化作用素の基本的関係式に関するものである：

【定理 6.23】 T を $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素とし，$t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{K}$ を任意にとる．このとき，次の作用素等式が成り立つ：

$$e^{itd\Gamma(T)} a(f)\, e^{-itd\Gamma(T)} = a\left(e^{itT} f\right), \tag{6.121}$$

$$e^{itd\Gamma(T)} a(f)^*\, e^{-itd\Gamma(T)} = a\left(e^{itT} f\right)^*, \tag{6.122}$$

$$e^{itd\Gamma(T)} \Phi_{\mathrm{S}}(f)\, e^{-itd\Gamma(T)} = \Phi_{\mathrm{S}}\left(e^{itT} f\right). \tag{6.123}$$

証明　定理 6.22-(v) により

$$e^{itd\Gamma(T)} = \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n e^{itT}.$$

[19] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999）の定理 4.22-(v) を参照．

任意の $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{K}$ に対して

$$\Psi_n := a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* \Omega$$

とおくと

$$(a(f)^*\Psi_n)^{(k)} = \begin{cases} \sqrt{(n+1)!}\, S_{n+1}(f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) & ; k = n+1 \\ 0 & ; k \neq n+1 \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\Psi_n\right)^{(n+1)} &= \sqrt{(n+1)!}\, S_{n+1}\left(e^{itT}f \otimes e^{itT}f_1 \otimes \cdots \otimes e^{itT}f_n\right) \\ &= \left(a\left(e^{itT}f\right)^* a\left(e^{itT}f_1\right)^* \cdots a\left(e^{itT}f_n\right)\Omega\right)^{(n+1)} \\ &= \left(a\left(e^{itT}f\right)^* e^{itd\Gamma(T)}\Psi_n\right)^{(n+1)}. \end{aligned}$$

また，$\left(e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\Psi_n\right)^{(k)} = 0$, $k \neq n+1$．したがって

$$e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\Psi_n = a\left(e^{itT}f\right)^* e^{itd\Gamma(T)}\Psi_n.$$

ゆえに，任意の $\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ に対して

$$e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\Psi = a\left(e^{itT}f\right)^* e^{itd\Gamma(T)}\Psi.$$

上の計算と同様にして

$$e^{itd\Gamma(T)}\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K}), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{6.124}$$

が成り立つことがわかる．したがって

$$e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\, e^{-itd\Gamma(T)}\Psi = a\left(e^{itT}f\right)^*\Psi, \quad \forall \Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K}).$$

定理 6.4-(v) によって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ は $a\left(e^{itT}f\right)^*$ の芯であるから，この等式は，$D\left(e^{itT}f\right)^*$ 上へと拡張される．したがって

$$a\left(e^{itT}f\right)^* \subset e^{itd\Gamma(T)}a(f)^*\, e^{-itd\Gamma(T)}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{K}. \tag{6.125}$$

そこで，f のかわりに $e^{-itT}f$ をとれば

$$a(f)^* \subset e^{itd\Gamma(T)}a\left(e^{-itT}f\right)^* e^{-itd\Gamma(T)}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{K}.$$

これは

$$e^{-itd\Gamma(T)}a(f)^* e^{itd\Gamma(T)} \subset a\big(e^{-itT}f\big)^*$$

を意味する[20]．そこで，t を $-t$ とすれば，(6.125) の逆の関係が得られる．ゆえに作用素の等式 (6.122) が成立する．

$\Phi_{\mathrm{S},0}(f) := (a(f) + a(f)^*)/\sqrt{2}$ とおけば，(6.121) と (6.122) によって

$$e^{itd\Gamma(T)}\Phi_{\mathrm{S},0}(f)\, e^{-itd\Gamma(T)} = \Phi_{\mathrm{S},0}\big(e^{itT}f\big).$$

両辺の閉包をとることにより，(6.123) が得られる．∎

次に 2 つの複素ヒルベルト空間 $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ に対して，それぞれから構成されるボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}')$ の関係を調べる．明確さを期すために，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ のフォック真空を $\Omega_{\mathcal{K}}$ と記し，$a^{\#}_{\mathcal{K}}(f)$ $(f \in \mathcal{K})$ によって $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の生成・消滅作用素を表す．同様に，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上のシーガル場を $\Phi_{\mathcal{K}}(f)$ （$f \in \mathcal{K}$） で記す．

【定理 6.24】 $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ を複素ヒルベルト空間とし，$u : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ をユニタリ変換とする．

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ とすべての $f_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f_1)^* \cdots a_{\mathcal{K}}(f_n)^*\Omega_{\mathcal{K}} = a_{\mathcal{K}'}(uf_1)^* \cdots a_{\mathcal{K}'}(uf_n)^*\Omega_{\mathcal{K}'} \qquad (6.126)$$

が成り立つ．

(ii) すべての $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$\Gamma(u)a^{\#}_{\mathcal{K}}(f)\Gamma(u)^{-1} = a^{\#}_{\mathcal{K}'}(uf), \qquad (6.127)$$

$$\Gamma(u)\Phi_{\mathcal{K}}(f)\Gamma(u)^{-1} = \Phi_{\mathcal{K}'}(uf). \qquad (6.128)$$

(iii) $\mathcal{K}$ 上のすべての自己共役作用素 T に対して

$$\Gamma(u)d\Gamma(T)\Gamma(u)^{-1} = d\Gamma(uTu^{-1}). \qquad (6.129)$$

証明　まず，定理 6.22-(iv) によって，$\Gamma(u)$ はユニタリであることを確認しておこう．

---

[20] 同一のヒルベルト空間で働く線形作用素 A, B について，$A \subset B$ ならば，任意のユニタリ作用素 U に対して，$UAU^{-1} \subset UBU^{-1}$．この事実を応用した．

(i) (6.40) と (6.41) および

$$(\otimes^n u)S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = S_n(uf_1 \otimes uf_2 \otimes \cdots \otimes uf_n)$$

による．

(ii) (i) から，すべての $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ に対して

$$\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi = a_{\mathcal{K}'}(uf)^*\Gamma(u)\psi$$

が成り立つ．定理 6.4-(v) によって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ は $a_{\mathcal{K}}(f)^*$ の芯であるから，任意の $\psi \in D(a_{\mathcal{K}}(f)^*)$ に対して，$\psi_n \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ があって $\psi_n \to \psi$, $a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi_n \to a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi$ $(n \to \infty)$ となる．上式から，$\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi_n = a_{\mathcal{K}'}(uf)\Gamma(u)\psi_n$. $\Gamma(u)$ は有界であるから，$\Gamma(u)\psi_n \to \Gamma(u)\psi$, $\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi_n \to \Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\psi$ $(n \to \infty)$. $a_{\mathcal{K}'}(uf)^*$ は閉であるから，$\Gamma(u)\psi \in D(a_{\mathcal{K}'}(uf)^*)$ かつ $\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(u)^*\psi = a_{\mathcal{K}'}(uf)^*\Gamma(u)\psi$ が成り立つ．したがって，$\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^* \subset a_{\mathcal{K}'}(uf)\Gamma(u)$. これは，$a_{\mathcal{K}}(f)^* \subset \Gamma(u)^{-1}a_{\mathcal{K}'}(uf)^*\Gamma(u)$ を意味する．$\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ の役割を換えれば，$a_{\mathcal{K}'}(uf) \subset \Gamma(u^{-1})^{-1}a_{\mathcal{K}}(f)^*\Gamma(u^{-1}) = \Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\Gamma(u)^{-1}$. よって，作用素の等式 $\Gamma(u)a_{\mathcal{K}}(f)^*\Gamma(u)^{-1} = a_{\mathcal{K}'}(uf)^*$ が得られる．この式の共役を考えることにより，消滅作用素に関する作用素等式が導かれる．ゆえに (6.127) が成立する．

(6.127) によって，$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{K})$ 上で (6.128) が成立する．これと定理 6.9-(iv) によって，作用素の等式 (6.128) が得られる．

(iii) 作用素解析のユニタリ共変性により

$$\Gamma(u)\, e^{itd\Gamma(T)}\Gamma(u)^{-1} = e^{it\Gamma(u)\, d\Gamma(T)\Gamma(u)^{-1}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

一方，左辺は，定理 6.22-(iii), (iv) によって

$$\Gamma\big(ue^{itT}u^{-1}\big) = \Gamma\big(e^{ituTu^{-1}}\big) = e^{it\, d\Gamma(uTu^{-1})}$$

に等しい．したがって，作用素の等式 (6.129) が成り立つ． ∎

6.9 生成作用素と消滅作用素の第 2 量子化作用素に関する相対限界

すでに注意したように，T が $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素ならば，$d\Gamma(T)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の自己共役作用素である．ボソンフォック空間上の作用素論の観点からは，

$d\Gamma(T)$ の摂動を考えることは自然である．これは，量子場の理論の文脈においても重要である．第2量子化作用素の摂動論においては，生成・消滅作用素の第2量子化作用素に関する相対限界が重要な役割を演じる．この節はこの側面の解析に関わるものである．

【補題 6.25】 T を $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素とする．

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ と $j = 1, \cdots, n$ に対して，作用素の等式

$$\overline{S_n(I \otimes I \cdots \otimes \overset{j\text{番目}}{\overbrace{T}} \otimes I \cdots \otimes I)S_n} = \frac{1}{n}T^{(n)} \tag{6.130}$$

が成立する．ただし，$T^{(n)}$ は (6.103) で定義される．

(ii) $T \geq 0$ ならば，任意の $\psi \in D((T^{(n)})^{1/2})$ に対して

$$n\left\|\left(I \otimes I \cdots \otimes \overset{j\text{番目}}{\overbrace{T^{1/2}}} \otimes I \cdots \otimes I\right)\psi\right\|^2 = \left\|\left(T^{(n)}\right)^{1/2}\psi\right\|^2. \tag{6.131}$$

証明　以下の計算において，次の周知の事実を用いる（証明は容易）：任意の $g_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, n)$ と各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$S_n(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = S_n(g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)}). \tag{6.132}$$

(i) (6.130) の左辺の作用素を L_n とおく．$f_j \in D(T)$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\psi := S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$ とすれば

$$\begin{aligned}
L_n\psi &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} S_n\big(f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \overset{j\text{番目}}{\overbrace{T}}\ f_{\sigma(j)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} S_n(Tf_{\sigma(j)} \otimes f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(j-1)} \otimes f_{\sigma(j+1)} \cdots \otimes f_{\sigma(n)}) \\
&\qquad\qquad (\because (6.132)) \\
&= \frac{(n-1)!}{n!}\{S_n(Tf_1 \otimes f_2 \cdots\cdots \otimes f_n) + S_n(f_1 \otimes Tf_2 \otimes f_3 \otimes \cdots \otimes f_n) \\
&\quad + \cdots + S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes Tf_n)\} \quad (\because (6.132)) \\
&= \frac{1}{n}T^{(n)}\psi.
\end{aligned}$$

したがって，$\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n D(T)$ 上で $L_n = T^{(n)}/n$ が成り立つ．$\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^n D(T)$ は $T^{(n)}$ の芯であるから，極限議論により（S_n の有界性を使う），$T^{(n)}/n \subset L_n$ が示される．

L_n が対称作用素であることは容易にわかる．したがって，$T^{(n)}/n = L_n$ でなければならない．

(ii) 任意の $\psi \in D(T^{(n)})$ に対して，$S_n\psi = \psi$ と (i) によって

$$n\big\|(I \otimes I \cdots \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\widehat{T^{1/2}}} \otimes I \cdots \otimes I)\psi\big\|^2 = \langle \psi, T^{(n)}\psi \rangle = \big\|\big(T^{(n)}\big)^{1/2}\psi\big\|^2 \quad (6.133)$$

が成り立つ．一般定理（付録 C，定理 C.10-(i)）の応用により，$D(T^{(n)})$ は $\big(T^{(n)}\big)^{1/2}$ の芯である．したがって，極限議論により，(6.131) はすべての $\psi \in D\big(\big(T^{(n)}\big)^{1/2}\big)$ へと拡張される． ∎

$a(f)$ $(f \in \mathcal{K})$ を $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の消滅作用素とする．h は $\mathcal{K}$ 上の非負自己共役作用素で単射であるとし

$$H_{\mathrm{b}} := d\Gamma(h) \quad (6.134)$$

とおく．

次の補題に述べる不等式は，ボース場の数学的解析にとって最も基本的な評価式の範疇に属する：

【補題 6.26】 すべての $f \in D(h^{-1/2})$ と $\psi \in D(H_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，$\psi \in D(a(f)) \cap D(a(f)^*)$ であり（したがって，$D(H_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset D(a(f)) \cap D(a(f)^*), \forall f \in D(h^{-1/2})$），次の不等式が成り立つ：

$$\|a(f)\psi\| \le \big\|h^{-1/2}f\big\|\big\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\big\|, \quad (6.135)$$

$$\|a(f)^*\psi\|^2 \le \big\|h^{-1/2}f\big\|^2\big\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\big\|^2 + \|f\|^2\|\psi\|^2. \quad (6.136)$$

証明 任意の $\phi \in D(a(f)^*)$ と $\psi \in D(H_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle a(f)^*\phi, \psi\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\big\langle S_n\big(f \otimes \phi^{(n-1)}\big), \psi^{(n)}\big\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\big\langle f \otimes \phi^{(n-1)}, \psi^{(n)}\big\rangle \quad (\because\ S_n\psi^{(n)} = \psi^{(n)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\big\langle h^{-1/2}f \otimes \phi^{(n-1)}, (h^{1/2} \otimes I \otimes \cdots \otimes I)\psi^{(n)}\big\rangle .
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|\langle a(f)^*\phi,\psi\rangle| &\le \|h^{-1/2}f\|\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\|\phi^{(n-1)}\|\|(h^{1/2}\otimes I\otimes\cdots\otimes I)\psi^{(n)}\| \\
&\le \|h^{-1/2}f\|\|\phi\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\|(h^{1/2}\otimes I\otimes\cdots\otimes I)\psi^{(n)}\|^2\right)^{1/2} \\
&\qquad (\because \text{級数に関するコーシー・シュヴァルツの不等式}) \\
&= \|h^{-1/2}f\|\|\phi\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|(h^{(n)})^{1/2}\psi^{(n)}\|^2\right)^{1/2} \\
&= \|h^{-1/2}f\|\|\phi\|\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\|. \qquad (\because \text{補題 6.25-(ii)})
\end{aligned}
$$

すなわち，$|\langle a(f)^*\phi,\psi\rangle| \le \|h^{-1/2}f\|\|\phi\|\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\|$. この不等式は，リースの表現定理により，$\psi \in D(a(f)^{**}) = D(a(f))$ かつ (6.135) を意味する．

$a^{\#}(f)$ に関する CCR を用いることにより，任意の $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|a(f)^*\psi\|^2 &= \langle\psi, a(f)a(f)^*\psi\rangle = \|f\|^2\|\psi\|^2 + \|a(f)\psi\|^2 \\
&\le \|f\|^2 + \|h^{-1/2}f\|^2\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\|^2 \quad (\because (6.135)).
\end{aligned}
$$

したがって，(6.136) が任意の $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$ に対して成立する．$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$ は $D(H_{\mathrm{b}})$ の芯であるから，付録 C の定理 C.10-(i) によって，それは $D(H_{\mathrm{b}}^{1/2})$ の芯でもある．したがって，極限議論により，(6.136) が成立する．∎

付録 C の定理 C.10-(ii) の応用により

$$
\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\| \le \|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\|, \quad \psi \in D(H_{\mathrm{b}}^{1/2}) \tag{6.137}
$$

が成り立つ．これと (6.135), (6.136) から

$$
\|a^{\#}(f)\psi\| \le c_f\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\|, \quad f \in D(h^{-1/2}),\ \psi \in D(H_{\mathrm{b}}^{1/2}) \tag{6.138}
$$

が導かれる．ただし

$$
c_f := \sqrt{\|h^{-1/2}f\|^2 + \|f\|^2}, \quad f \in D(h^{-1/2}). \tag{6.139}
$$

不等式 (6.138) は次の補題を意味する：

【補題 6.27】　任意の $f \in D(h^{-1/2})$ に対して，$a^{\#}(f)(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2} \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}))$ であり

$$\left\|a^{\#}(f)(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}\right\| \le c_f \tag{6.140}$$

が成り立つ．

【補題 6.28】　任意の $f \in D(h^{-1/2})$ に対して，$(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a^{\#}(f)$ は定義域を $D\bigl(a^{\#}(f)\bigr)$ とする有界作用素であり

$$\left\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a^{\#}(f)\right\| \le c_f. \tag{6.141}$$

が成り立つ．

証明　補題 6.27 によって，$A := a(f)(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2} \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ であるから，$A^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ であり，$\|A^*\| = \|A\| \le c_f$ が成り立つ．一方，$A^* \supset (H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a(f)^*$．したがって，$A^*$ は稠密に定義された線形作用素 $(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a(f)^*$ の有界拡張である．ゆえに拡大定理により，$\left\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a(f)^*\right\| = \|A^*\| \le c_f$．$a^{\#}(f) = a(f)^*$ の場合も同様である．■

【補題 6.29】　任意の $f \in D\bigl(h^{-1/2}\bigr)$ に対して

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\psi\| \le \sqrt{2}c_f\left\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\right\|, \quad \psi \in D(H_{\mathrm{b}}^{1/2}). \tag{6.142}$$

証明　$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\psi\| \le (\|a(f)\psi\| + \|a(f)^*\psi\|)/\sqrt{2}$ と補題 6.27 による．■

【補題 6.30】　任意の $f \in D(h)$ とすべての $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$ に対して

$$[H_{\mathrm{b}}, a(f)^*]\psi = a(hf)^*\psi, \tag{6.143}$$

$$[H_{\mathrm{b}}, a(f)]\psi = -a(hf)\psi \tag{6.144}$$

が成り立つ．

証明　$\psi = a(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega$, $f_j \in D(h)$ $(j = 1, \cdots, n)$ という型のベクトルに対して (6.143), (6.144) を示せば十分である．H_{b} の定義により

$$H_{\mathrm{b}}a(f)^*\psi = a(hf)^*\psi + \sum_{j=1}^{n} a(f)^*a(f_1)^* \cdots \underbrace{a(hf_j)^*}_{j\text{ 番目}} \cdots a(f_n)^*\Omega$$

$$= a(hf)^*\psi + a(f)^* H_{\mathrm{b}}\psi.$$

したがって，(6.143) が成立する．(6.144) についても同様（(6.143) の共役関係式を考察すればただちに出る）． ∎

【補題 6.31】 任意の $f \in D(h) \cap D(h^{-1/2})$ に対して，$a^\#(f)$ は $D(H_{\mathrm{b}})$ を $D(H_{\mathrm{b}}^{1/2})$ の中に移す．さらに $(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a^\#(f)(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}))$ であり

$$\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a^\#(f)(H_{\mathrm{b}}+1)^{-1}\| \le c_f + c_{hf} \tag{6.145}$$

が成り立つ．

証明 (6.143) は

$$(H_{\mathrm{b}}+1)a(f)^*\psi = a(f)^*(H_{\mathrm{b}}+1)\psi + a(hf)^*\psi, \quad \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$$

を意味する．したがって

$$\begin{aligned}&(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a(f)^*\psi\\ &\quad = (H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a(f)^*(H_{\mathrm{b}}+1)\psi + (H_{\mathrm{b}}+1)^{-1/2}a(hf)^*\psi.\end{aligned}$$

これと補題 6.28 によって

$$\begin{aligned}\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a(f)^*\psi\| &\le c_f\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\| + c_{hf}\|\psi\|\\ &\le (c_f+c_{hf})\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\|.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(h))$ は H_{b} の芯であるから，極限論法により，この不等式は，すべての $\psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ へと拡張され，同時に $a(f)^*\psi \in D((H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2})$, $\forall\psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ が示される（(6.138) も使う）．したがって

$$\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a(f)^*\psi\| \le (c_f+c_{hf})\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\|, \quad \psi \in D(H_{\mathrm{b}}) \tag{6.146}$$

が成り立つ．ゆえに題意が成立する．$a(f)$ の場合も同様である． ∎

【補題 6.32】 $f, g \in D(h^{-1/2}) \cap D(h)$ とする．このとき，任意の $\psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ に対して，$\psi \in D\big(a^\#(f)a^\#(g)\big)$ であり，次の不等式が成り立つ：

$$\|a^\#(f)a^\#(g)\psi\| \le c_f(c_g + c_{hg})\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\|. \tag{6.147}$$

さらに

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Phi_{\mathrm{S}}(g)\psi\| \le 2c_f(c_g + c_{hg})\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\| \tag{6.148}$$

が成立する.

証明 (6.138) と補題 6.31 によって，次のように評価できる：

$$\left\|a^{\#}(f)a^{\#}(g)\psi\right\| \le c_f\left\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}a^{\#}(g)\psi\right\| \le c_f(c_g+c_{hg})\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\|.$$

したがって，(6.147) が成立する.

(6.148) については，$\psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ ならば

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Phi_{\mathrm{S}}(g)\psi = \frac{1}{2}\Big(a(f)^*a(g)^* + a(f)^*a(g) + a(f)a(g)^* + a(f)a(g)\Big)\psi$$

であるから，3 角不等式と (6.147) を用いることにより，(6.148) が得られる. ∎

6.10 単純な摂動に関する自己共役性

前節で証明した事実の応用として，単純なクラスの対称作用素 H_I に対する摂動作用素 $H_{\mathrm{b}} + H_I$ の自己共役性を証明しよう.

$g \in D(h^{-1/2})$ を任意に固定し，$\lambda \in \mathbb{R}$ を定数とし

$$H_g(\lambda) := H_{\mathrm{b}} + \Phi_{\mathrm{S}}(g) + \lambda\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2 \tag{6.149}$$

を考える. $\lambda = 0$ の場合の $H_g(\lambda)$ を H_g とする：

$$H_g := H_g(0). \tag{6.150}$$

【定理 6.33】

(i) $D(H_g) = D(H_{\mathrm{b}})$ で，H_g は自己共役で下に有界である.

(ii) $g \in D(h^{-1/2}) \cap D(h)$ とする. このとき，すべての実数 λ に対して，$D(H_g(\lambda)) = D(H_{\mathrm{b}})$ である. さらに，$g \neq 0$ で

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{2c_g(c_g + c_{hg})} \tag{6.151}$$

ならば，$H_g(\lambda)$ は自己共役であり，下に有界である.

証明　(i) (6.142) によって，$D(H_{\mathrm{b}}) \subset D(H_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset D(\Phi_{\mathrm{S}}(g))$ であるから，$D(H_g) = D(H_{\mathrm{b}})$ である．$\psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ としよう．このとき，(6.142) によって

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\psi\| \le \sqrt{2}c_g \big\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\big\|.$$

シュヴァルツの不等式と初等的な等式

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \quad a>0,\ b>0,\ \varepsilon>0 \tag{6.152}$$

によって

$$\begin{aligned}\big\|(H_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\big\| &\le \|\psi\|^{1/2}\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\|^{1/2}\\ &\le \varepsilon\|(H_{\mathrm{b}}+1)\psi\| + \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi\|.\end{aligned}$$

ただし，$\varepsilon > 0$ は任意である．したがって

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\psi\| \le \sqrt{2}c_g\varepsilon\|H_{\mathrm{b}}\psi\| + b_\varepsilon\|\psi\|. \tag{6.153}$$

ただし

$$b_\varepsilon := \sqrt{2}c_g\left(\varepsilon + \frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\sqrt{2}c_g\varepsilon < 1$ にとれる．したがって，加藤–レリッヒの定理（付録 C，定理 C.15）によって，H_g は自己共役であり，下に有界である．

(ii) $H_I := \Phi_{\mathrm{S}}(g)+\lambda\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2$ とおけば，(6.153) と (6.148) によって，$D(H_{\mathrm{b}}) \subset D(H_I)$ であり（したがって，$D(H_g(\lambda)) = D(H_{\mathrm{b}})$）

$$\|H_I\psi\| \le (\sqrt{2}c_g\varepsilon + |\lambda|2c_g(c_g+c_{hg}))\|H_{\mathrm{b}}\psi\| + (|\lambda|2c_g(c_g+c_{hg})+b_\varepsilon)\|\psi\|$$

(6.151) ならば，$\big(\sqrt{2}c_g\varepsilon + +|\lambda|2c_g(c_g+c_{hg})\big) < 1$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．したがって，再び，加藤–レリッヒの定理によって，$H_g(\lambda)$ は自己共役であり，下に有界である．　∎

自己共役作用素 H_g は，量子場の理論の文脈では，**ファン・ホーフェ (van Hove) モデル**の抽象版のハミルトニアンを表す．

6.11 確率論的表示と CCR の無限次元シュレーディンガー表現

2.4 節の (2.38) と (6.101) は類似している．同様に，公式 (6.99), (6.100) は (2.41), (2.42) と形が同じであることに気づく．これらは，ボソンフォック空間の理論とガウス超過程の理論との間にある種の照応が存在することを示唆する．実際，次の定理が成り立つ：

【定理 6.34】 $\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とし，その複素化を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ で表す．$(L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}), \{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ を $\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス超過程とする．このとき，ユニタリ変換 $U : \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \to L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ で次の性質をもつものがただ 1 つ存在する：

(i) $U\Omega = 1$.

(ii) すべての $n \geq 0$ に対して，$U\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(n)}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \Gamma^{(n)}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ であり，すべての $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$Ua(f_1)^* \cdots a(f_n)^*\Omega = 2^{n/2} : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : \tag{6.154}$$

が成り立つ．

(iii) 作用素の等式

$$U\phi_C(f)U^{-1} = \phi(f), \quad f \in \mathcal{H} \tag{6.155}$$

が成り立つ．ただし，C は $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の複素共役子である（2.6 節を参照）．

(iv) 各 $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$\pi(f) := U\pi_C(f)U^{-1} \tag{6.156}$$

とおく．このとき，$\pi(f)$ は

$$\mathcal{D}_{\mathrm{W}} := \mathcal{L}(\{1, : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : \mid n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n\}) \tag{6.157}$$

を不変にし，すべての $n \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\pi(f)1 = i\phi(f)1, \tag{6.158}$$

$$\pi(f) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : = i\phi(f) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) :$$

$$-i\sum_{j=1}^{n}\langle f,f_j\rangle:\phi(f_1)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n): \quad (6.159)$$

が成り立つ．

証明　$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．定理 6.5 と定理 2.14 およびヒルベルト空間に関する同型定理により，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(Q_{\mathcal{H}},d\mu_{\mathcal{H}})$ へのユニタリ変換 U で (i) および

$$U\Omega_{\nu}^{(n)}=\phi_{\nu}^{(n)},\quad n\in\mathbb{N},\ \nu\in\mathbb{Z}_{+}^{\infty,n}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

(ii) 任意の $f_j\in\mathcal{H}$ $(j=1,\cdots,n)$ は $f_j=\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k,f_j\rangle e_k$ と展開できるから

$$a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{\infty}\langle e_{k_1},f_1\rangle\cdots\langle e_{k_n},f_n\rangle a(e_{k_1})^*\cdots a(e_{k_n})^*\Omega$$

が成り立つ（$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ の位相での収束）．U は有界であるから

$$\begin{aligned}Ua(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega&=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{\infty}2^{n/2}\langle e_{k_1},f_1\rangle\cdots\langle e_{k_n},f_n\rangle:\phi(e_{k_1})\cdots\phi(e_{k_n}):\\&=2^{n/2}:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):\end{aligned}$$

となる．したがって，(6.154) が成立する．

(iii) 任意の $f,g\in\mathcal{H}$ に対して，$\langle f,g\rangle\in\mathbb{R}$ であるから，関係式 (6.70) により

$$e^{i\phi_C(f+g)}=e^{i\phi_C(f)}e^{i\phi_C(g)}=e^{i\phi_C(g)}e^{i\phi_C(f)},\quad f,g\in\mathcal{H} \qquad (6.160)$$

が成り立つ．したがって，$\psi_g:=e^{i\phi_C(g)}\Omega$ とおけば，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$Ue^{it\phi_C(f)}\psi_g=Ue^{i\phi_C(tf+g)}\Omega.$$

そこで，定理 6.11 と (ii) を使えば

$$\begin{aligned}Ue^{i\phi_C(tf+g)}\Omega&=e^{-\|tf+g\|^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}:\phi(tf+g)^n:\\&=e^{-\|tf+g\|^2/4}:e^{i\phi(tf+g)}:=e^{i\phi(tf+g)}=e^{it\phi(f)}e^{i\phi(g)}.\end{aligned}$$

特に，$t=0$ とすれば

$$Ue^{i\phi_C(g)}\Omega=e^{i\phi(g)}. \qquad (6.161)$$

ゆえに

$$Ue^{it\phi_C(f)}\psi_g = e^{it\phi(f)}U\psi_g.$$

定理 6.12-(v) によって，$\mathcal{L}(\{\psi_g \mid g \in \mathcal{H}\})$ は稠密であるから，$Ue^{i\phi_C(f)} = e^{it\phi(f)}U$，すなわち，$Ue^{it\phi_C(f)}U^{-1} = e^{it\phi(f)}$ が成り立つ．$t \in \mathbb{R}$ は任意であるから，作用素の等式 $U\phi_C(f)U^{-1} = \phi(f)$ が成立する．

$\pi(f)$ が $\mathcal{D}_W$ を不変にすることは (ii) から明らか．その作用は次のようにして計算される：

$$\begin{aligned}
\pi(f) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : &= 2^{-n/2}U\pi_C(f)a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \\
&= 2^{-n/2}\frac{i}{\sqrt{2}}Ua(f)^*a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \\
&\quad -2^{-n/2}\frac{i}{\sqrt{2}}Ua(f)a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega \\
&= i : \phi(f)\phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : \\
&\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle\, 2^{-n/2}Ua(f_1)\cdots\widehat{a(f_j)^*}\cdots a(f_n)\Omega \\
&\qquad\qquad (\because\ a^{\#}(\cdot) \text{ に関する CCR と } (6.30)) \\
&= i : \phi(f)\phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : \\
&\quad -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle : \phi(f_1)\cdots\widehat{\phi(f_j)^*}\cdots\phi(f_n) :
\end{aligned}$$

そこで，定理 2.18 を用いて，最後の式を変形すれば，(6.159) が得られる． ∎

定理 6.34-(ii) によって，すべての $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\phi(f), \pi(f)$ は部分空間上で CCR を満たすことがわかる：すべての $f, g \in \mathcal{H}$ と $\psi \in \mathcal{D}_W$ に対して

$$[\phi(f), \phi(g)]\psi = 0, \tag{6.162}$$

$$[\phi(f), \pi(g)]\psi = i\langle f, g\rangle\psi, \tag{6.163}$$

$$[\pi(f), \pi(g)]\psi = 0. \tag{6.164}$$

すなわち，$(L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$，$\mathcal{D}_W$，$\{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ は $\mathcal{H}$ を添え字集合とする CCR の自己共役表現である．(6.155) によって，この表現はフォック表現 $(\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_\mathbb{C})$, $\mathcal{F}_{b,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}_\mathbb{C})$, $\{\phi_C(f),\ \pi_C(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ とユニタリ同値である．だが，新しく得られた表現 $(L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$，$\mathcal{D}_W$，$\{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ は，$\phi(f)$

が掛算作用素になっているという意味で特徴的である．この表現の“意味”を探るために，基礎となるヒルベルト空間が最も簡単な場合，すなわち，$\mathcal{H}=\mathbb{R}$ の場合を見てみよう：

■例 6.35　$\mathcal{H}=\mathbb{R}$ の場合，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}$ であり，ガウス型確率変数 $\phi(f)\ (f\in\mathbb{R})$ の特性関数は $C_{\phi(f)}=e^{-f^2/4}$ である．このような確率変数を実現する確率空間 $(Q_{\mathcal{H}},\mathfrak{B},\mu_{\mathcal{H}})$ と $\phi(f)$ のモデルの 1 つとして

$$Q_{\mathcal{H}}=\mathbb{R},\quad \mathfrak{B}=\mathfrak{B}^1,\quad d\mu_{\mathcal{H}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx,\quad \phi(f)=fM_x$$

をとることができる．ただし，M_x は $x\in Q_{\mathcal{H}}=\mathbb{R}$ による掛算作用素を表す．したがって，特に $\phi(1)=M_x$ は変数 x による掛算作用素である．

自然な同型 $\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathbb{C}=\otimes^n\mathbb{C}\cong\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{N}$ によって，$\mathbb{C}$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ は

$$\ell^2(\mathbb{Z}_+):=\left\{\psi=\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \psi_n\in\mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty}|\psi_n|^2<\infty\right\}$$

と同型である．この同型のもとで，各 $f\in\mathbb{R}$ に対して

$$(a(f)^*\psi)_n=\sqrt{n}f\psi_{n-1},\quad n\geq 1,\ f\in\mathbb{C},\ \psi\in D(a(f)^*)$$

が成り立つ．これからわかるように，$\mathcal{H}=\mathbb{C}$ の場合における CCR のフォック表現 $\{\phi_C(f),\pi_{\mathrm{C}}(f)\mid f\in\mathbb{R}\}$ は，1 自由度のボルン–ハイゼンベルク–ヨルダン表現と本質的に同じである[21]．

この例では，$f\in\mathbb{R}$ ならば $\phi_C(f)=f\phi_C(1)$, $\phi(f)=f\phi(1)$, $\pi_C(f)=f\pi_C(1)$, $\pi(f)=f\pi(1)$, $a^{\#}(f)=fa^{\#}(1)$ であるので，$f=1$ の場合における当該作用素を考えれば十分である．そこで，$\phi_C:=\phi_C(1)$, $\phi:=\phi(1)$, $\pi_C:=\pi_C(1)$, $\pi:=\pi(1)$, $a:=a(1)$ とおく．いまの場合における定理 6.34 におけるユニタリ変換を u とすれば，それは $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ から $L^2\big(\mathbb{R},\pi^{-1/2}e^{-x^2}dx\big)$ へのユニタリ変換であり

$$u\phi_{\mathrm{C}}u^{-1}=\phi=M_x$$

が成り立つ．また，(6.159) により

$$\pi:\phi^n:=i\phi:\phi^n:-in:\phi^{n-1}:$$

であるので

$$\pi=-i\frac{d}{d\phi}+i\phi\quad(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}\text{ 上})$$

---

[21] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の例 3.4 において $c=\hbar=1$ としたもの．

となる．そこで，写像 $v : L^2\bigl(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx\bigr) \to L^2(\mathbb{R})$ を

$$(vF)(x) := \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}F(x), \quad F \in L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$$

によって定義すれば，v はユニタリであり，作用素の等式

$$v\phi v^{-1} = M_x$$

が成り立つ．$v\pi v^{-1}$ については

$$v\pi v^{-1} = -iD_x \quad (v(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})\ \text{上})$$

となることがわかる．ただし，D_x は変数 x に関する一般化された微分作用素である．詳細は省略するが，実は，作用素の等式 $v\pi v^{-1} = -iD_x$ が成り立つ[22]．ゆえに，$\{v\phi v^{-1}, v\pi v^{-1}\}$ は自由度 1 の CCR のシュレーディンガー表現である[23]．

上の例と同様にして，$\mathcal{H}$ が $\mathbb{R}^n$（$n \in \mathbb{N}$ は任意）の場合にも，ガウス型確率変数によるボソンフォック空間の確率論的表示は，CCR の表現論の観点からは，CCR のシュレーディンガー表現として捉えることができる．そこで，一般の $\mathcal{H}$ に対して，CCR の表現 $(L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}), \mathcal{D}_{\mathrm{W}}, \{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{H}\})$ を **$\mathcal{H}$ を添え字集合とする CCR のシュレーディンガー表現**または**汎関数的表示** (functional representation) と呼ぶ．これと呼応して，$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ をボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ の ***Q* 表示**という．

第 4 章で見たように，有限自由度の量子力学の場合，CCR のシュレーディンガー表現による記述においては，ハミルトニアンによって生成される熱半群が関与する量に対して汎関数（経路）積分表示を導くことができ，これを用いることにより，理論のいくつかの側面に関してはより詳しい解析を遂行することが可能となった．無限自由度の量子力学の場合も，もし，有限自由度の CCR のシュレーディンガー表現と類似の特性をもつ CCR の表現（無限自由度の CCR の表現）が見出されるならば，この枠組みへと移行することにより，有限自由度の場合と並行的な議論がなされうるであろうことは想像に難くない．後に見るように，ここで導入されたシュレーディンガー表現がまさにそのような役割を演じる CCR の表現の 1 つなのである．

---

[22] $-iD_x$ は $v(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ 上で本質的に自己共役である（証明せよ）．

[23] CCR のシュレーディンガー表現については，拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997)，新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，19991)，拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2005) を参照．

6.12　$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ 上における第2量子化作用素

定理6.34におけるユニタリ変換 U のもとで，第2量子化作用素がどのような作用素に移るかを見ておこう．

$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の線形作用素 A について，$CA \subset AC$（すなわち，$f \in D(A)$ ならば $Cf \in D(A)$ かつ $ACf = CAf$ が成り立つ）ならば，A は $\mathcal{H}$ によって**簡約される**（または，$\mathcal{H}$ は A を簡約する）という．この場合，$A(D(A) \cap \mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ が成り立ち（つまり，$f \in D(A) \cap \mathcal{H} \Longrightarrow Af \in \mathcal{H}$），$D(A)$ が $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ で稠密ならば，$D(A) \cap \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}$ で稠密である．

T を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の自己共役作用素で $\mathcal{H}$ によって簡約されるものとし

$$d\Gamma_{\mathrm{S}}(T) := Ud\Gamma(T)U^{-1} \tag{6.165}$$

とおく[24]．これは，自己共役作用素のユニタリ変換であるから，$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ 上の自己共役作用素である．定理6.34-(i), (ii) によって

$$d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)1 = 0, \tag{6.166}$$

$$d\Gamma_{\mathrm{S}}(T) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := \sum_{j=1}^{n} :\phi(f_1)\cdots \overset{j\,\text{番目}}{\phi(Tf_j)} \cdots\phi(f_n):,$$
$$f_j \in D(T) \cap \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n \tag{6.167}$$

が成り立つ．

第2種の第2量子化作用素については，A を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の稠密に定義された閉作用素で $\mathcal{H}$ によって簡約されるものとし

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A) := U\Gamma(A)U^{-1} \tag{6.168}$$

とおく．上と同様にして

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A)1 = 1, \tag{6.169}$$

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) :=: \phi(Af_1)\cdots\phi(Af_n):,$$
$$f_j \in D(A) \cap \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n \tag{6.170}$$

---

[24] 添え字「S」はシュレーディンガー表現の意．

が成り立つことがわかる．

T が自己共役ならば，定理 6.22-(v) によって

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(e^{itT}) = e^{it\, d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{6.171}$$

である．さらに，T が非負ならば

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-\beta T}) = e^{-\beta\, d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)}, \quad \forall \beta > 0 \tag{6.172}$$

となる．

【定理 6.36】 A が縮小作用素，すなわち，$\|A\| \le 1$ を満たすならば $\Gamma_{\mathrm{S}}(A)$ は正値性保存作用素である．

証明 任意の $z \in \mathbb{C}$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して (6.169) と (6.170) および $\Gamma_{\mathrm{S}}(A)$ の有界性（連続性）によって

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A) : e^{z\phi(f)} := : e^{z\phi(Af)} : . \tag{6.173}$$

定理 1.44-(i) によって

$$: e^{z\phi(f)} := e^{z\phi(f)} e^{-z^2\|f\|^2/4}. \tag{6.174}$$

したがって

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A)\, e^{z\phi(f)} = e^{z^2\langle f,(1-A^*A)f\rangle/4}\, e^{z\phi(Af)}. \tag{6.175}$$

特に $z = i$ とすれば

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A)\, e^{i\phi(f)} = e^{-\langle f,(1-A^*A)f\rangle/4}\, e^{i\phi(Af)}. \tag{6.176}$$

したがって，任意の $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{S}}(A)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(k)\Gamma_{\mathrm{S}}(A)\, e^{i\sum_{j=1}^n k_j\phi(f_j)}\, dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(k)G(k)\, e^{i\sum_{j=1}^n k_j\phi(Af_j)}\, dk.\end{aligned}$$

ただし

$$G(k) := e^{-\sum_{j,\ell=1}^n a_{j\ell}k_jk_\ell/4}, \quad a_{j\ell} := \langle f_j, (1 - A^*A)f_\ell\rangle .$$

A の縮小性 ($\|A\| \le 1$) により，$1 - A^*A \ge 0$ であるから，行列 $a := (a_{j\ell})$ は半正定値である (i.e. 任意の $z_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\sum_{j,\ell=1}^n a_{j\ell} z_j^* z_\ell \ge 0$)．ここで，$\|A\| < 1$ の場合と $\|A\| = 1$ の場合を分けて考える．

(1) $\|A\| < 1$ の場合

この場合，$1 - A^*A$ の固有値はすべて正である．したがって，定理 1.38 の証明と同様にして，$G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であり，G の逆フーリエ変換

$$\check{G} := \mathcal{F}_n^{-1} G \tag{6.177}$$

は

$$\check{G}(x) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\det a}} e^{-\sum_{j,\ell=1}^n (a^{-1})_{j\ell} x_j x_\ell} > 0$$

によって与えられることがわかる．任意の $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2} \hat{u}\hat{v} \tag{6.178}$$

であるので

$$u * v = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}_n^{-1}(\hat{u}\hat{v}). \tag{6.179}$$

したがって

$$\Gamma_{\mathrm{S}}(A) F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2} (F * \check{G})(\phi(Af_1), \cdots, \phi(Af_n))$$

となる．ゆえに，$F \ge 0$ ならば $\Gamma_{\mathrm{S}}(A) F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \ge 0$ (a.e.) である．

次に，任意の非負関数 $\psi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ を $F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ の型の関数で近似することを考える．定理 2.10-(ii) によって

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} := \{F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \mid n \in \mathbb{N},\ F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n\} \tag{6.180}$$

は $L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ で稠密である．したがって，$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ に属する点列 $\{F_N\}_{N=1}^\infty$ で $F_N \to \psi$ $(N \to \infty)$ となるものが存在する．すなわち，任意の $\eta > 0$ に対して，ある番号 N_0 があって，$N \ge N_0$ ならば $\|F_N - \psi\| < \eta$ が成り立つ．いま，$\psi \ge 0$ (a.e.) であるから，これは

$$\||F_N| - \psi\|_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} < \eta, \quad N \ge N_0 \tag{6.181}$$

を意味する．各 N ごとに $m \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, m)$ と $G_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ があって $F_N = G_N(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_m))$ と書ける（m, f_j も N に依存しうる）．$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ で $\rho \geq 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x)\, dx = 1$, $\operatorname{supp} \rho(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}$ を満たすものを任意にとり，$\varepsilon > 0$ に対して

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^m} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

を考え

$$G_{N,\varepsilon} := \rho_\varepsilon * |G_N|$$

とおく．このとき，明らかに $G_{N,\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ かつ $G_{N,\varepsilon} \geq 0$ であり，付録 A の定理 A.3-(iii) によって

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|G_{N,\varepsilon} - |G_N|\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} = 0, \quad \forall p \geq 1$$

が成り立つ．したがって

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|G_{N,\varepsilon}(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_m)) - |F_N|\|_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} = 0.$$

したがって，ある $\varepsilon_N > 0$ があって

$$\|G_{N,\varepsilon_N}(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_m)) - |F_N|\|_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} < \eta$$

これと (6.181) および 3 角不等式により $H_N := G_{N,\varepsilon_N}(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_m))$ とおけば

$$\|H_N - \psi\|_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} < 2\eta, \quad N \geq N_0$$

となる．ゆえに

$$\|\Gamma_{\rm S}(A) H_N - \Gamma_{\rm S}(A)\psi\|_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} < 2\eta, \quad N \geq N_0.$$

前半の結果により，$\Gamma_{\rm S}(A) H_N \geq 0$ (a.e.)．これと $\eta > 0$ の任意性により，$\Gamma_{\rm S}(A)\psi \geq 0$ (a.e.) がしたがう．よって，$\Gamma_{\rm S}(A)$ は正値性保存作用素である．

(2) $\|A\| = 1$ の場合

この場合は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n := (1 - \frac{1}{n}) A$ とおけば $\|A_n\| < 1$ であり，$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ が成り立つ．したがって，定理 6.22 によって，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \Gamma_{\rm S}(A_n) = \Gamma_{\rm S}(A)$．したがって，特に，任意の非負関数 $\psi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ に対して $\lim_{n\to\infty} \Gamma_{\rm S}(A_n)\psi = \Gamma_{\rm S}(A)\psi$．(1) の結果により，$\Gamma_{\rm S}(A_n)\psi \geq 0$ (a.e.)．したがって，$\Gamma_{\rm S}(A)\psi \geq 0$ (a.e.)．ゆえに，$\Gamma_{\rm S}(A)$ は正値性保存作用素である． ∎

【定理 6.37】 T が非負の自己共役作用素で単射ならば，各 $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta\, d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)}$ は正値性改良作用素である．

証明　定理 6.20-(iii) によって，$d\Gamma_{\mathrm{S}}(T) \geq 0$ であるから，任意の $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ に対して，$e^{-z\, d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)}$ は有界作用素である．したがって，任意の非負の $\psi, \phi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}) \setminus \{0\}$ と $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ に対して

$$f(z) := \left\langle \psi, e^{-z\, d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)} \phi \right\rangle$$

が定義される．作用素解析により，$f(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則である．T の非負性と単射性により，$\ker d\Gamma_{\mathrm{S}}(T) = \{\alpha 1 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ であるから[25]，定理 3.9 の応用により

$$\lim_{\beta \to \infty, \beta > 0} f(\beta) = \langle \psi, 1 \rangle \langle 1, \phi \rangle > 0$$

となる．したがって，f は恒等的に 0 ではない．ゆえに，$f(z)$ の $\mathrm{Re}\, z > 0$ における零点は孤立点である．$\|e^{-tT}\| \leq 1$, $\forall t > 0$ であるから，定理 6.36 によって，$e^{-t d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)} = \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-tT})$ は正値性保存作用素である．したがって，任意の $t \in (0, \beta]$ に対して，$f(t) \geq 0$ である．ゆえに，$f(t_0) > 0$ となる $t_0 \in (0, \beta)$ がある．そこで

$$\psi' := \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-t_0 T/2})\psi, \quad \phi' := \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-t_0 T/2})\phi$$

とおけば，$\langle \psi', \phi' \rangle = f(t_0) > 0$．$\psi' \geq 0$, $\phi' \geq 0$ であるから，これは

$$\psi'\phi' \geq 0, \quad \psi'\phi' \not\equiv 0$$

を意味する．そこで，$\eta := \min\{\psi', \phi'\}$ とおけば，$\eta \not\equiv 0$ となる（上の第 2 式から，$\mu_0(K) > 0$ となる可測集合 $K \subset Q_{\mathcal{H}}$ が存在し，K 上で $\psi'\phi' > 0$．したがって，特に，K 上で $\psi' > 0$ かつ $\phi' > 0$．ゆえに K 上で $\eta > 0$）．$\Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T})$ は正値性保存作用素であるから，$\Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T})(\phi' - \eta) \geq 0$ (μ-a.e.)，すなわち，$\Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T})\phi' \geq \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T})\eta$ (μ-a.e.)．したがって

$$\begin{aligned} \left\langle \psi, e^{-\beta d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)} \phi \right\rangle &= \left\langle \psi', \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T}) \phi' \right\rangle \\ &\geq \left\langle \eta, \Gamma_{\mathrm{S}}(e^{-(\beta - t_0)T}) \eta \right\rangle \end{aligned}$$

定理 6.22-(vii) により，右辺 $\geq |\langle 1, \eta \rangle|^2 > 0$ となる．

ゆえに $e^{-\beta d\Gamma_{\mathrm{S}}(T)}$ は正値性改良作用素である．　■

---

[25] 拙著，『フォック空間と量子場 上』（日本評論社，2000）の定理 4.14-(ii)，(4.39) を応用する．

6.13　汎関数的方向微分と部分積分公式

式 (6.159) は，各 $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$D_f := i\pi(f) + \phi(f) \quad (D(D_f) = D(\pi(f)) \cap D(\phi(f))) \tag{6.182}$$

によって定義される線形作用素 D_f が微分作用素的な性質をもつことを示唆する．実際，(6.159) から

$$D_f : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle : \phi(f_1)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n) :, \\ n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H},\ j = 1, \cdots, n. \tag{6.183}$$

また

$$D_f 1 = 0 \tag{6.184}$$

も成り立つ．

容易にわかるように，$\mathcal{D}_{\mathrm{W}} \subset D(D_f)$．したがって，$D_f$ は稠密に定義されているので，D_f^* が存在し

$$D_f^* \supset -i\pi(f) + \phi(f)$$

となる．したがって，D_f^* も稠密に定義されている．ゆえに，D_f は可閉である．その閉包を $\overline{D}_f$ で表す．

ウィック積以外のベクトルに対する $\overline{D}_f$ の作用がどのような形をとるかを調べよう．まず，次の事実に注意する：

【補題 6.38】　任意の $g \in \mathcal{H}$ に対して，$e^{i\phi(g)} \in D(\overline{D}_f)$ であり

$$\overline{D}_f e^{i\phi(g)} = i \langle f, g \rangle\, e^{i\phi(g)}. \tag{6.185}$$

証明

$$e^{i\phi(g)} = e^{-\|g\|^2/4} : e^{i\phi(g)} := \lim_{N\to\infty} F_N.$$

ただし

$$F_N := e^{-\|g\|^2/4} \sum_{n=0}^{N} \frac{i^n}{n!} : \phi(g)^n : .$$

したがって，$F_N \in D(D_f)$ かつ (6.183) によって

$$D_f F_N = e^{-\|g\|^2/4} \sum_{n=1}^{N} \frac{i^n}{(n-1)!} \langle f, g \rangle : \phi(g)^{n-1} : \to i \langle f, g \rangle e^{i\phi(g)} \ (N \to \infty).$$

したがって，題意が成立する．∎

式 (6.185) は，$\overline{D}_f$ は固有値 $i\langle f, g\rangle$ をもち，これに属する固有ベクトルの1つが $e^{i\phi(g)}$ であることを語る．

【定理 6.39】 すべての $n \in \mathbb{N}$，任意の $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ および任意の $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(\overline{D}_f)$ であり

$$\overline{D}_f F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle (\partial_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \tag{6.186}$$

が成り立つ．ただし，$(\partial_j F)(x_1, \cdots, x_n) := \partial F(x_1, \cdots, x_n)/\partial x_j, (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

証明　F のフーリエ変換 $\hat{F}$ を用いて

$$\begin{aligned} F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j \phi(f_j)} \hat{F}(k)\, dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(\sum_{j=1}^n k_j f_j)} \hat{F}(k)\, dk \end{aligned} \tag{6.187}$$

と書ける．(6.185) によって

$$\begin{aligned} \overline{D}_f\, e^{i\phi(\sum_{j=1}^n k_j f_j)} \hat{F}(k) &= i \sum_{j=1}^{n} k_j \langle f, f_j \rangle\ e^{i\phi(\sum_{j=1}^n k_j f_j)} \hat{F}(k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \widehat{(\partial_j F)}(k)\, e^{i\sum_{\ell=1}^n k_\ell \phi(f_\ell)}. \end{aligned}$$

この事実と (6.187) の右辺の積分をリーマン近似まで遡って考えることにより，補題 6.38 の証明と同様にして，$F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(\overline{D}_f)$ かつ

$$\overline{D}_f F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \widehat{(\partial_j F)}(k)\, e^{i\sum_{\ell=1}^n k_\ell \phi(f_\ell)}\, dk$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \, (\partial_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$$

が示される． ∎

【定理 6.40】 各 $n \in \mathbb{N}$ と任意の n 変数の多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ $(x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, n)$ および任意の $f_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(D_f)$ であり

$$D_f P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \, (\partial_j P)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \quad (6.188)$$

が成り立つ．

証明 $P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(D_f)$ という事実は定理 2.19 による．

(6.188) は

$$P(x) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

の場合（$k_1, \cdots, k_n$ は非負整数）に対して示せば十分である．そこで，$\varepsilon > 0$ として

$$P_\varepsilon(x) := P(x) \, e^{-\varepsilon |x|^2}$$

とすれば，$P_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ である．したがって，定理 6.39 により

$$\overline{D}_f P_\varepsilon(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \, (\partial_j P_\varepsilon)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

容易に証明される不等式

$$|P_\varepsilon(x)| \le |P(x), \quad |\partial_j P_\varepsilon(x)| \le |\partial_j P(x)|| + 2|x_j||P(x)| \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

とルベーグの優収束定理を用いることにより，$\varepsilon \to 0$ のとき，$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ の収束の意味で

$$P_\varepsilon(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \to P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)),$$

$$\overline{D}_f P_\varepsilon(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \to \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle \, (\partial_j P)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$$

となることがわかる．したがって，

$$\overline{D}_f P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle (\partial_j P)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

これと証明のはじめに述べた事実により，題意が成立する． ■

有限次元ベクトル空間上の解析学でよく知られているように[26]，一般に，$\mathbb{K}$ 上（$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）の n 次元計量ベクトル空間 V $(n \in \mathbb{N})$ の開集合 D 上のスカラー値関数（スカラー場）$F : D \to \mathbb{K}$ について，$x \in D$, $y \in V$ に対して

$$F'(x, y) := \lim_{h \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, h \to 0} \frac{F(x + hy) - F(x)}{h}$$

が存在するとき，これを点 $x \in D$ における，F の y 方向への微分係数という．この場合，$F'(x, y)$ が x について D 上で連続ならば

$$F'(x, y) = dF(x)(y)$$

が成り立つ．ただし，対応：$D \ni x \mapsto dF(x)$ は D 上の微分形式である $[dF(x) \in V^*(V$ の双対空間$)]$．

さて，G を n 変数の多項式または $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の元とし

$$\text{grad}_{f_1, \cdots, f_n} G := \sum_{j=1}^{n} (\partial_j G)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) f_j \tag{6.189}$$

とすれば，(6.186) または (6.188) より

$$\overline{D}_f G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \langle f, \text{grad}_{f_1, \cdots, f_n} G \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{C}} \tag{6.190}$$

と書ける．したがって，上述の有限次元ベクトル解析の場合との類推でいえば，左辺は，$Q_\mathcal{H}$ 上の関数 $G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ の f 方向への微分係数と解釈されうる．そこで，作用素 D_f を f 方向への**汎関数的方向微分作用素**と呼ぶ．こうして，ガウス超過程の範疇において，$\mathcal{H}$ が無限次元の場合も含めて，方向微分の概念が定義される．

(6.182) を $\pi(f)$ について解けば

$$\pi(f) = -iD_f + i\phi(f) \quad (\mathcal{D}_\mathrm{W} \text{ 上}) \tag{6.191}$$

[26] たとえば，拙著，『現代ベクトル解析の原理と応用』（共立出版，2006）の 7.1 節を参照．

が成り立つ．これは，$\mathcal{H}$ が無限次元の場合に，$\{\phi(f), \pi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ を無限自由度の CCR のシュレーディンガー表現と呼ぶことをより自然なものとする．

以上の結果の応用として，測度 $\mu_{\mathcal{H}}$ に関する部分積分公式を導くことができる：

【定理 6.41】(部分積分公式) $n \in \mathbb{N}$ を任意にとり，G を任意の n 変数多項式または $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の任意の元とする．このとき，すべての $f, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ に対して

$$\int_{Q_{\mathcal{H}}} \phi(f) G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\, d\mu_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_{Q_{\mathcal{H}}} \overline{D}_f G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\, d\mu_{\mathcal{H}} \tag{6.192}$$

が成り立つ．

証明 証明を通して，$G(\phi) := G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ とおく．(6.192) の左辺を L とすれば $L = \langle 1, \phi(f) G(\phi) \rangle_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})}$ と書ける．これと (6.191) によって

$$L = -i \langle \pi(f) 1, G(\phi) \rangle_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} + \int_{Q_{\mathcal{H}}} \overline{D}_f G(\phi)\, d\mu_{\mathcal{H}}$$

となる．一方，$\pi(f) 1 = i\phi(f)$ であるから

$$L = -\int_{Q_{\mathcal{H}}} \phi(f) G(\phi)\, d\mu_{\mathcal{H}} + \int_{Q_{\mathcal{H}}} \overline{D}_f G(\phi)\, d\mu_{\mathcal{H}}$$

となる．したがって，(6.192) が得られる． ∎

通常の有限次元空間上の解析学において，当の解析に関わる測度に対する部分積分公式が重要な役割を演じることはよく知られている．このことは，無限次元空間上の測度に関してもあてはまる．それゆえ，無限次元空間上の測度に対してその部分積分公式を確立することは，無限次元解析学における研究の基礎的課題の 1 つとなる．この意味において，定理 6.41 は重要である．

6.14 ブラウン運動の構成

自然数 n に対して，$L^2(\mathbb{R}^n)$ の実元からなる実ヒルベルト空間を $L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$ と記す：

$$L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid f^* = f \right\}.$$

この節では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が $\oplus^d L^2_{\rm real}(\mathbb{R})$（$L^2_{\rm real}(\mathbb{R})$ の d 個の直和ヒルベルト空間）の場合を考察することにより，このヒルベルト空間に付随するガウス超過程から d 次元ブラウン運動が構成されることを示す．容易にわかるように，$(\oplus^d L^2_{\rm real}(\mathbb{R}))_{\mathbb{C}} = \oplus^d L^2(\mathbb{R})$ である．この場合の複素共役子 C は次の形で与えられる：

$$C(f) = (f_1^*, \cdots, f_d^*), \quad f = (f_1, \cdots, f_d) \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}). \tag{6.193}$$

実ヒルベルト空間 $\oplus^d L^2_{\rm real}(\mathbb{R})$ を添え字集合とするガウス超過程を $\{q(f) \mid f \in \oplus^d L^2_{\rm real}(\mathbb{R})\}$ とし，それが実現している確率空間を (M, Σ, μ) とする．各 $t > 0$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して，(M, Σ, μ) 上の確率変数 $B_j(t)$ を

$$B_j(t) := q(0, \cdots, 0, \overset{j\,\text{番目}}{\chi_{[0,t]}}, 0, \cdots, 0) \tag{6.194}$$

によって定義する．ただし，$\chi_{[0,t]}$ は閉区間 $[0,t]$ 上の定義関数である．また，$B_j(0) := 0$ とする．確率変数 $B_j(t)$ を第 j 成分とする確率ベクトル

$$B(t) := (B_1(t), \cdots, B_d(t)) \tag{6.195}$$

を考える．

【定理 6.42】　$\{B(t) \mid t \geq 0\}$ は，m（質量）$= 2$ の場合における，$\mathbb{R}^d$ の原点から出発する d 次元ブラウン運動である．

証明　任意の $N \in \mathbb{N}$ と $k_n \in \mathbb{R}^d$, $t_n > 0$ $(n = 1, \cdots, N)$ に対して，特性関数

$$\chi(k_1, \cdots, k_N) := \left\langle e^{i \sum_{n=1}^N k_n B(t_n)} \right\rangle$$

を計算してみればよい．$\sum_{n=1}^N k_n B(t_n) = q(f_N)$．ただし

$$f_N = \left(\sum_{n=1}^N (k_n)_1 \chi_{[0,t_n]}, \sum_{n=1}^N (k_n)_2 \chi_{[0,t_n]}, \cdots, \sum_{n=1}^N (k_n)_d \chi_{[0,t_n]} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned}\chi(k_1, \cdots, k_n) &= e^{-\|f_N\|^2/4} = e^{-\sum_{j=1}^d \| \sum_{n=1}^N (k_n)_j \chi_{[0,t_n]} \|^2_{L^2(\mathbb{R})}/4} \\ &= e^{-\sum_{n,n'=1}^N k_n k_{n'} \min\{t_n, t_{n'}\}/4}.\end{aligned}$$

これと命題 4.13 によって題意が成立することがわかる. ∎

こうして, 実ヒルベルト空間 $\oplus^d L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R})$ を添え字集合とするガウス超過程を用いると d 次元ブラウン運動を簡単に構成することができる. ブラウン運動のこの実現は, 無限次元解析学的な観点からも有用な側面をもつが, ここでは, この理論をこれ以上展開することは控える.

関連図書

[1] 新井朝雄,『フォック空間と量子場 上下』, 日本評論社, 2000.
[2] 新井朝雄,『現代物理数学ハンドブック』, 朝倉書店, 2005.
[3] 新井朝雄,『量子現象の数理』, 朝倉書店, 2006.
[4] 新井朝雄,『量子統計力学の数理』, 共立出版, 2008.
[5] 新井朝雄・江沢 洋,『量子力学の数学的構造 I, II』, 朝倉書店, 1999.
[6] 江沢 洋・新井朝雄,『場の量子論と統計力学』, 日本評論社, 1988.
[7] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.
[8] 飛田武幸,『ブラウン運動』, 岩波書店, 1975.
[9] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1577, Springer, 1994.
[10] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis and Self-adjointness*, Academic Press, 1975.
[11] 重川一郎 ,『確率解析』, 岩波書店, 2008.
[12] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean* (*Quantum*) *Field Theory*, Princeton University Press, 1974.
[13] B. Simon and R. Høegh-Krohn, Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled Bose fields, *J. Functional Analysis*, **9** (1972), 121–180.

第7章

ユークリッド的量子場の理論と汎関数積分

7.1 抽象的自由ボース場

$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とし，その複素化を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ とする．$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の複素共役子を C で表す．h を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の非負の自己共役作用素とする．このとき，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ における h の第2量子化

$$H_{\mathrm{b}} := d\Gamma(h) \tag{7.1}$$

は非負の自己共役作用素である．

量子場の理論への応用においては，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は，（粒子的描像から見て）1個のボソンの状態のヒルベルト空間を記述し，h はそのハミルトニアンを表す（自由粒子のハミルトニアンとは限らないことに注意；たとえば，$\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の場合，h の例として，ポテンシャルの入ったシュレーディンガー作用素が考えられる）．この文脈では，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$h^{(n)}$ は，同種のボソンからなる n 粒子系——その状態のヒルベルト空間は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$——のハミルトニアンを表すことになる．したがって，H_{b} は相互作用のない同種の無限個のボソンからなる系——その1粒子ハミルトニアンが h——のハミルトニアンである．この意味で，H_{b} を1粒子ハミルトニアンが h である**自由ボース場のハミルトニアン**または単に**自由ハミルトニアン**という．

以下，h は単射であり，$\mathcal{H}$ によって簡約されると仮定する：$Ch \subset hC$ (i.e. $f \in D(h)$ ならば $Cf \in D(h)$ かつ $Chf = hCf$)．したがって，特に，

$h(D(h) \cap \mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.

実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{H}_\alpha := D(h^\alpha) \cap \mathcal{H} \tag{7.2}$$

とおく．各 $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ と $g \in \mathcal{H}_{1/2}$ に対して，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上の作用素 $\phi_0(f), \pi_0(g)$ をそれぞれ

$$\phi_0(f) := \phi_C(h^{-1/2}f), \quad \pi_0(g) := \pi_C(h^{1/2}g) \tag{7.3}$$

によって定義し

$$\mathcal{V}_h := \mathcal{H}_{1/2} \cap \mathcal{H}_{-1/2} \tag{7.4}$$

とおく．このとき，$\{\phi_0(f), \pi_0(f) \mid f \in \mathcal{V}_h\}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上で CCR を満たす：

$$[\phi_0(f), \phi_0(g)] = 0, \quad [\phi_0(f), \pi_0(g)] = i\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}, \quad [\pi_0(f), \pi_0(g)] = 0 \quad (\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})\ \text{上}). \tag{7.5}$$

すなわち，$\{\phi_0(f),\ \pi_0(f) \mid f \in \mathcal{V}_h\}$ は $\mathcal{V}_h$ を添え字集合とする CCR の自己共役表現である．ゆえに，量子力学の基本原理にしたがって，$\{\phi_0(f),\ \pi_0(f) \mid f \in \mathcal{V}_h\}$ は考察下のボソン系における諸々の物理量を構成するための根源的物理量の集合の1つと解釈されうる．

量子力学の一般論でよく知られているように，ハミルトニアンが H の量子系の物理量 A（自己共役作用素）の時間発展は $A_H(t) := e^{itH}A\,e^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$ によって記述される．これを H に関する A の**ハイゼンベルク作用素**という．自己共役作用素 $A_H(t)$ は，A に対して，その時刻 t での "形" を与えるものである．逆に $A(t)$ から見た場合，A は時刻0の物理量と呼ばれる．

そこで，$\phi_0(f), \pi_0(f)$ についても任意のハミルトニアン H（$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上の自己共役作用素）に関する時間発展

$$\phi_t^H(f) := e^{itH}\phi_0(f)\,e^{-itH}, \quad \pi_t^H(f) := e^{itH}\pi_0(f)\,e^{-itH}$$

を考えるのは自然である．この観点からは，$\phi_0(f), \pi_0(f)$ は**時刻0の場** (time-zero field)，$\phi_t^H(f), \pi_t^H(f)$ はハミルトニアン H に関する**時刻 t の場**と呼ばれる．後者の型の量子場を総称的に**鋭時刻場** (sharp-time field) という．三つ組 $(\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}),\ H,\ \{\phi_0(f),\ \pi_0(f) \mid f \in \mathcal{V}_h\})$ はハミルトニアンを H とするボース場のモデルの1つを定義する．

以下では，自由ハミルトニアン $H_{\rm b}$ に関する時間発展を考え，$H_{\rm b}$ に関する時刻 t の場，すなわち

$$\phi(t,f) := e^{itH_{\rm b}}\phi_0(f)\,e^{-itH_{\rm b}}, \quad f\in\mathcal{H}_{-1/2} \tag{7.6}$$

$$\pi(t,g) := e^{itH_{\rm b}}\pi_0(g)\,e^{-itH_{\rm b}}, \quad g\in\mathcal{H}_{1/2},\ t\in\mathbb{R} \tag{7.7}$$

を**時刻 t の自由場**と呼ぶ．3 つ組 $(\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}),\ H_{\rm b},\ \{\phi_0(f),\ \pi_0(f)\mid f\in\mathcal{V}_h\})$ は h を 1 粒子ハミルトニアンとする**抽象的自由ボース場の理論**と呼ばれる．

作用素 $e^{\pm itH_{\rm b}}$ と $\phi_0(f)$ は有限粒子部分空間 $\mathcal{F}_{\rm b,0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を不変にするから，各 $n\in\mathbb{N}$ と任意の $t_j\in\mathbb{R}$, $f_j\in\mathcal{H}_{-1/2}$ に対して，鋭時刻場 $\phi(t,f_j)$ の **n 点真空期待値**

$$W_n(t_1,f_1,t_2,f_2,\cdots,t_n,f_n) := \langle\Omega,\phi(t_1,f_1)\phi(t_2,f_2)\cdots\phi(t_n,f_n)\Omega\rangle,$$
$$n\in\mathbb{N},\ t_j\in\mathbb{R},\ f_j\in\mathcal{H}_{-1/2},\ j=1,\cdots,n \tag{7.8}$$

が定義される[1]．$(t_1,f_1,\cdots,t_n,f_n)$ の関数としての $W_n(t_1,f_1,t_2,f_2,\cdots,t_n,f_n)$ は自由場の **n 点ワイトマン (Wightman) 関数**とも呼ばれる．

自由場のワイトマン関数を計算する目的も兼ねて，鋭時刻場 $\phi(t,f)$, $\pi(t,g)$ を陽に求めてみよう．結論からいえば，次の定理が成り立つ：

【定理 7.1】 すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して，作用素の等式

$$\phi(t,f) = \phi_C(e^{ith}h^{-1/2}f), \quad f\in\mathcal{H}_{-1/2}, \tag{7.9}$$

$$\pi(t,g) = \pi_C(e^{ith}h^{1/2}g), \quad g\in\mathcal{H}_{1/2} \tag{7.10}$$

が成り立つ．

証明 定理 6.23 の (6.123) を $T=h$ として応用すればよい． ∎

【定理 7.2】 $f\in\mathcal{H}_{-1/2}\cap\mathcal{H}_2$, $\psi\in D(N_{\rm b}^{1/2})$ とする．このとき，$\phi(t,f)\psi$ は t について 2 回強微分可能であり

$$\frac{d}{dt}\phi(t,f)\psi = \pi(t,f)\psi, \tag{7.11}$$

---

[1] $\pi(t_j,f_j)$ $(f_j\in\mathcal{H}_{1/2})$ についても同様に真空期待値が考えられるが，ここでは省略する．

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi(t,f)\psi + \phi(t,h^2 f)\psi = 0, \tag{7.12}$$

が成り立つ．ただし，t に関する微分は強微分の意味でとる．

証明　定理6.8を応用すればよい． ∎

(7.11) は，$\pi(t,f)$ と $\phi(t,f)$ の関係を与えるものであり，(7.12) は**量子場 $\phi(t,f)$ の方程式**である．

(7.9) の第1式を用いると，容易にわかるように

$$W_1(t,f) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{H}_{-1/2}, \tag{7.13}$$

$$W_2(t,f,s,g) = \frac{1}{2}\left\langle h^{-1/2}f, e^{-i(t-s)h}h^{-1/2}g\right\rangle_{\mathcal{H}}, \quad t,s \in \mathbb{R},\ f,g \in \mathcal{H}_{-1/2}. \tag{7.14}$$

一般の n については，次の結果が得られる：

【系 7.3】　各 $n \in \mathbb{N}$ とすべての $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$W_{2n-1}(t_1, f_1, \cdots, t_{2n-1}, f_{2n-1}) = 0, \tag{7.15}$$

$$W_{2n}(t_1, f_1, \cdots, t_{2n}, f_{2n}) = \sum_{\mathrm{comb}} W_2(t_{i_1}, f_{i_1}, t_{j_1}, f_{j_1}) \cdots W_2(t_{i_n}, f_{i_n}, t_{j_n}, f_{j_n}) \tag{7.16}$$

証明　(7.9) と定理6.18を用いればよい． ∎

■**例 7.4（相対論的自由スカラー場）**　$d \in \mathbb{N}$ とし，$\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える．したがって，$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}^d)$ である．定数 $m \geq 0$ と $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の一般化されたラプラシアン Δ から定まる非負自己共役作用素

$$h_{\mathrm{rel}} := (-\Delta + m^2)^{1/2} \tag{7.17}$$

は**相対論的シュレーディンガー作用素**と呼ばれる．$\mathcal{F}_d$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換とし，関数 $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$\omega(k) := (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{R}^d \tag{7.18}$$

によって定義する．このとき，作用素解析とフーリエ解析により

$$\mathcal{F}_d h_{\mathrm{rel}} \mathcal{F}_d^{-1} = \omega \tag{7.19}$$

が成り立つことがわかる．ただし，右辺は関数 ω による掛算作用素である．特殊相対性理論で知られているように，$\omega(k)$ は質量 m，運動量が k の相対論的自由粒子のエネルギーを表す[2]．$h_{\rm rel}$ の呼称はこの事実によるものである．(7.19) を用いると $Ch_{\rm rel} \subset h_{\rm rel}C$ (C は複素共役子) は容易にわかる．三つ組 $(\mathcal{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d)), d\Gamma(h_{\rm rel}), \{\phi_0(f), \pi_0(f) \mid f \in \mathcal{V}_{h_{\rm rel}}\})$ から定まる理論を**自由な相対論的中性スカラー量子場**の理論という．

$f \in D(h_{\rm rel}^{-1/2}) \cap D(h_{\rm rel}^2)$ としよう．このとき，定理 7.2 により，任意の $\psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ に対して，$\phi(t,f)\psi$ は，t について 2 回強微分可能であり

$$\frac{\partial^2 \phi(t,f)\psi}{\partial t^2} + \phi(t,(-\Delta + m^2)f)\psi = 0$$

という方程式を満たすことがわかる．これは，$(d+1)$ 次元時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d = \{(t,x) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}$ 上の実超関数 Φ に関する**自由なクライン–ゴルドン方程式**

$$\frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial t^2} - \Delta\Phi(t,x) + m^2\Phi(t,x) = 0$$

の量子場版にほかならない．この理由から，$\phi(t,f)$ を**自由なクライン–ゴルドン量子場**とも呼ぶ．

$\mathbb{R}^d$ の元を $x = (x_1, \cdots, x_d)$ と表示する場合，$\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d_x$ と記す．量子力学の文脈では，$\mathbb{R}^d_x$（x を空間の位置と解釈する座標表示）と $\mathbb{R}^d_k$（$k = (k_1, \cdots, k_d)$ を運動量を表す点として解釈する運動量表示）の 2 つが基本的である[3]．この場合，フーリエ変換 $\mathcal{F}_d$ は $L^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ変換と解釈するのが自然である．したがって，$\mathcal{F}_d$ の第 2 種の第 2 量子化 $\Gamma(\mathcal{F}_d)$（6.8 節を参照）は $\mathcal{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_x))$——**座標表示のボソンフォック空間**——から $\mathcal{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_k))$ ——**運動量表示のボソンフォック空間**——へのユニタリ変換である．研究上よく用いられるのは，運動量表示のボソンフォック空間であるので，この空間での表示を導いておこう．作用素解析のユニタリ共変性により

$$\mathcal{F}_d h_{\rm rel}^\alpha e^{ith_{\rm rel}} \mathcal{F}_d^{-1} = \omega^\alpha e^{it\omega}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．この事実と (6.128) および (6.129) によって

$$\Gamma(\mathcal{F}_d)\phi(t,f)\Gamma(\mathcal{F}_d)^{-1} = \Phi_{\rm S}\left(e^{it\omega}\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right), \quad t \in \mathbb{R},\ f \in D(h_{\rm rel}^{-1/2}), \tag{7.20}$$

$$\Gamma(\mathcal{F}_d)\pi(t,g)\Gamma(\mathcal{F}_d)^{-1}) = \Phi_{\rm S}(i\sqrt{\omega}\, e^{it\omega}\hat{g}), \quad t \in \mathbb{R},\ g \in D(h_{\rm rel}^{1/2}), \tag{7.21}$$

$$\Gamma(\mathcal{F}_d)\, d\Gamma(h_{\rm rel})\Gamma(\mathcal{F}_d)^{-1} = d\Gamma(\omega) \tag{7.22}$$

が得られる．ただし，$\hat{f} := \mathcal{F}_d f$（$f$ のフーリエ変換）．

---

[2] 真空中の光速 c が 1 となる単位系を用いる．

[3] 概念的に厳密にいうならば，$\mathbb{R}^d_k$ は $\mathbb{R}^d_x$ の双対空間として捉えるのが自然である．

7.2 ユークリッド化

(6.116) を用いると，真空期待値 $W_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n)$ ($n \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathcal{H}, j = 1, \cdots, n$) は

$$W_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n) = \left\langle \Omega, \phi_0(f_1)\, e^{i(t_2-t_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(f_2)\, e^{i(t_3-t_2)H_\mathrm{b}} \cdots e^{i(t_n-t_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(f_n)\Omega \right\rangle \quad (7.23)$$

と書ける．第3章や第4章の理論を踏まえると，ここで，時間変数 t_j を複素時間 $z_j \in \mathbb{C}$（ただし，$\mathrm{Im}\,(z_j - z_{j-1}) \geq 0$, $j = 2, \cdots, n$ とする）に拡張するのは自然である．すなわち

$$W_n(z_1, f_1, \cdots, z_n, f_n) := \left\langle \Omega, \phi_0(f_1)\, e^{i(z_2-z_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(f_2)\, e^{i(z_3-z_2)H_\mathrm{b}} \cdots e^{i(z_n-z_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(f_n)\Omega \right\rangle \quad (7.24)$$

を考えるのである．特に，各 z_j を純虚数時間 it_j で置き換える操作を**ウィック回転**または**ユークリッド化**という[4]．任意の $t \geq 0$ と $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ に対して，e^{-tH_b} と $\phi_0(f)$ は有限粒子部分空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_\mathbb{C})$ を不変にするから，$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ と $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ ($j = 1, \cdots, n$) に対して

$$\begin{aligned} S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n) &:= \left\langle \Omega, \phi_0(f_1)\, e^{-(t_2-t_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(f_2)\, e^{-(t_3-t_2)H_\mathrm{b}} \right. \\ &\quad \left. \times \cdots \phi_0(f_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(f_n)\Omega \right\rangle \end{aligned} \quad (7.25)$$

が定義される．任意の $t_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \cdots, n$) に対しては

$$S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n) := S_n(t_{\sigma(1)}, f_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}, f_{\sigma(n)}) \quad (7.26)$$

とする．ただし，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は $t_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq t_{\sigma(n)}$ となる置換である．$(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n)$ の関数 $S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n)$ を自由場の ***n* 点シュヴィンガー** (Schwinger)

[4] 特殊相対論的時空 $\{(t,x) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3\}$（$t$ は時間座標，x は空間座標）の2点 (t,x), (t',x') の間の計量は，ミンコフスキー計量 $(t-t')^2 - (x-x')^2$ で与えられる．t, t' をそれぞれ，it, it' で置き換えれば，この計量は $-[(t-t')^2 + (x-x')^2]$ へと変容し，ユークリッド計量になる（マイナス符号は本質的でない；(-1) を掛けたものを改めて計量とすればよい）．"ユークリッド化" という呼称はこの構造にちなむ．

関数という．定義から容易にわかるように，$S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n)$ は置換対称性をもつ：

$$S_n(t_{\sigma(1)}, f_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}, f_{\sigma(n)}) = S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n), \quad \forall\sigma \in \mathfrak{S}_n. \quad (7.27)$$

自由場のシュヴィンガー関数を計算するために，補題を 1 つ用意する：

【補題 7.5】　すべての $t > 0$ に対して次の式が成り立つ：

$$e^{-tH_{\rm b}} a(f)^*\psi = a(e^{-th}f)^* e^{-tH_{\rm b}}\psi, \quad f \in \mathcal{H},\ \psi \in D(a(f)^*), \quad (7.28)$$

$$a(f)e^{-tH_{\rm b}}\phi = e^{-tH_{\rm b}} a(e^{-th}f)\phi, \quad f \in \mathcal{H},\ \phi \in D(a(e^{-th}f)). \quad (7.29)$$

証明　テンソル積の一般論より

$$e^{-tH_{\rm b}} = \Gamma(e^{-th}). \quad (7.30)$$

したがって，定理 6.23 の証明と同様にして，まず，(7.28) が $\mathcal{F}_{\rm b,fin}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上で成立することがわかる．あとは $\mathcal{F}_{\rm b,fin}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ が $a(f)^*$ の芯であることを用いて，極限議論により，任意の $\psi \in D(a(f)^*)$ へと拡張すればよい（$e^{-tH_{\rm b}}$ は有界であることに注意）．

(7.28) から，任意の $f \in \mathcal{H}$ と $\phi \in D(a(e^{-th}))$ および $\psi \in D(a(f)^*)$ に対して

$$\left\langle e^{-tH_{\rm b}}\phi, a(f)^*\psi \right\rangle = \left\langle e^{-tH_{\rm b}} a(e^{-th}f)\phi, \psi \right\rangle.$$

したがって，$e^{-tH_{\rm b}}\phi \in D(a(f))$ かつ $a(f)e^{-tH_{\rm b}}\phi = e^{-tH_{\rm b}}a(e^{-th}f)\phi$ が結論される．すなわち，(7.29) が成り立つ．　■

【定理 7.6】　各 $n \in \mathbb{N}$ とすべての $t_j, f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ $(j = 1, \cdots, 2n)$ に対して次の式が成り立つ：

$$S_{2n-1}(t_1, f_1, \cdots, t_{2n-1}, f_{2n-1}) = 0, \quad (7.31)$$

$$S_2(t_1, f_1, t_2, f_2) = \frac{1}{2}\left\langle h^{-1/2}f_1, e^{-|t_1-t_2|h}h^{-1/2}f_2 \right\rangle, \quad (7.32)$$

$$S_{2n}(t_1, f_1, \cdots, t_{2n}, f_{2n}) = \sum_{\rm comb} S_2(t_{i_1}, f_{i_1}, t_{j_1}, f_{j_1}) \cdots S_2(t_{i_n}, f_{i_n}, t_{j_n}, f_{j_n}) \quad (7.33)$$

証明　置換対称性 (7.26) により，$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_{2n}$ の場合について，(7.31)～(7.33) 示せば十分である．まず，$f_j \in \bigcap_{s\ge0} D(h^{-1/2}e^{sh})$ $(j=1,\cdots,2n)$ の場合について示す（そのあとで $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$, $j=1,\cdots,2n$ へと拡張する）．$b(f,g)$ を (6.92) によって定義される作用素とする．補題 7.5 によって，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&S_m(t_1,f_1,\cdots,t_m,f_m)\\
&\quad= \frac{1}{2^{m/2}}\Big\langle \Omega, b(h^{-1/2}f_1, h^{-1/2}f_1) b(e^{(t_2-t_1)h}h^{-1/2}f_2, e^{-(t_2-t_1)h}h^{-1/2}f_2)\\
&\qquad\times b(e^{(t_3-t_1)h}h^{-1/2}f_3, e^{-(t_3-t_1)h}h^{-1/2}f_3)\\
&\qquad\times\cdots b(e^{(t_m-t_1)h}h^{-1/2}f_m, e^{-(t_m-t_1)h}h^{-1/2}f_m)\Omega\Big\rangle
\end{aligned}
$$

と書ける．これと補題 6.17 および作用素解析からしたがう性質

$$
\left\langle e^{(t_k-t_1)h}h^{-1/2}f_k, e^{-(t_j-t_1)h}h^{-1/2}f_j\right\rangle = \left\langle h^{-1/2}f_k, e^{-(t_j-t_k)h}h^{-1/2}f_j\right\rangle, \quad t_k \le t_j
$$

によって求める結果が得られる．

次に，$f_1,\cdots,f_n$ が $\mathcal{H}_{-1/2}$ に属する場合にも (7.31), (7.33) が成立することを示す．拡張の方法を示すために，j を任意に固定し，$f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ の場合を考える．h のスペクトル測度を E_h とし，$N \in \mathbb{N}$ に対して，$f_{j,N} = E_h([0,N])f_j$ とすれば，容易にわかるように $f_{j,N} \in D(h^{-1/2}e^{sh})$, $\forall s \ge 0$ であり，

$$
\left\| h^{-1/2}f_{j,N} - h^{-1/2}f_j \right\| \to 0 \quad (N\to\infty) \tag{7.34}
$$

が成り立つ．したがって，任意の $g \in \mathcal{H}_{-1/2}$ と $t \ge 0$ に対して

$$
\lim_{N\to\infty}\left\langle h^{-1/2}g, e^{-th}h^{-1/2}f_{j,N}\right\rangle = \left\langle h^{-1/2}g, e^{-th}h^{-1/2}f_j\right\rangle .
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} S_{2n}(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_{j,N},\cdots t_{2n},f_{2n})\\
&\qquad= \sum_{\text{comb}} S_2(t_{i_1},f_{i_1},t_{j_1},f_{j_1})\cdots S_2(t_{i_n},f_{i_n},t_{j_n},f_{j_n}).
\end{aligned}
$$

また，明らかに

$$
\lim_{N\to\infty} S_{2n-1}(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_{j,N},\cdots t_{2n-1},f_{2n-1}) = 0.
$$

一方，任意の $m\in\mathbb{N}$, $j\le m$ に対して

$$\eta := e^{-(t_j-t_{j-1})H_{\rm b}}\phi_0(f_{j-1})\cdots\phi_0(f_2)\,e^{-(t_2-t_1)H_{\rm b}}\phi_0(f_1)\Omega,$$
$$\chi := e^{-(t_{j+1}-t_j)H_{\rm b}}\phi_0(f_{j+1})\cdots e^{-(t_m-t_{m-1})H_{\rm b}}\phi_0(f_m)\Omega$$

とおくと

$$\begin{aligned}&|S_m(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_{j,N},\cdots t_m,f_m)-S_m(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_j,\cdots t_m,f_m)|\\&\quad=|\langle\eta,\phi_0(f_{j,N}-f_j)\chi\rangle|\\&\quad\le\|\eta\|\|\phi_0(f_{j,N}-f_j)\chi\|\\&\quad\le\frac{1}{\sqrt{2}}\|\eta\|\|h^{-1/2}(f_{j,N}-f_j)\|(\|N_{\rm b}^{1/2}\chi\|+\|(N_{\rm b}+1)^{1/2}\chi\|).\end{aligned}$$

ここで，最後の不等式を得るのに命題6.6を用いた．これと (7.34) によって

$$\lim_{N\to\infty}S_m(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_{j,N},\cdots t_m,f_m)=S_m(t_1,f_1,\cdots,t_j,f_j,\cdots t_m,f_m)$$

となる．以上から，$f_j\in\mathcal{H}_{-1/2}$, $f_k\in\bigcap_{s\ge0}D(h^{-1/2}\,e^{sh})$, $k\ne j$ の場合に (7.31), (7.33) が成立することが示されたことになる．特に，$j=1$ の場合ついてそうである．以下，$j=2,3,4,\cdots$, と順に同様の議論を行えばよい． ∎

ガウス超過程の性質を想起するならば，(7.31)〜(7.33) は，ガウス型確率変数の族 $\{\phi_{\rm E}(t,f)\mid t\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{H}_{-1/2}\}$ で

$$\langle\phi_{\rm E}(t,f)\phi_{\rm E}(s,g)\rangle=\frac{1}{2}\big\langle h^{-1/2}f,e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\big\rangle,\quad f,g\in\mathcal{H}_{-1/2},\ t,s\in\mathbb{R}\tag{7.35}$$

を満たすものの存在を示唆する．この点を探るために右辺を変形してみる（右辺が適当なヒルベルト空間の内積になっているか，あるいは右辺を用いて適当な集合上に内積が定義されるかどうかを調べる）．h のスペクトル測度を E_h とすれば

$$\big\langle h^{-1/2}f,e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\big\rangle=\int_{[0,\infty)}\frac{e^{-|t-s|\lambda}}{\lambda}\,d\,\langle f,E_h(\lambda)g\rangle$$

が成り立つ． そこで，積分公式

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i(t-s)p}}{\lambda^2+p^2}\,dp=\frac{\pi\,e^{-|t-s|\lambda}}{\lambda},\quad\lambda>0\tag{7.36}$$

を思い出そう[5]. これを上式に代入すれば

$$\left\langle h^{-1/2}f, e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\right\rangle = \int_{[0,\infty)}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\pi}\frac{e^{i(t-s)p}}{\lambda^2+p^2}\,dp\right)d\left\langle f, E_h(\lambda)g\right\rangle. \quad (7.37)$$

ここで

$$\left|\frac{1}{\pi}\frac{e^{i(t-s)p}}{\lambda^2+p^2}\right| = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+p^2}$$

かつ $\pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} 1/(\lambda^2+p^2)\,dp = \lambda^{-1}$ であり, $s=\pm 1, \pm i$ に対して

$$\int_{[0,\infty)}\lambda^{-1}\,d\|E_h(\lambda)(f+sg)\|^2 = \|h^{-1/2}(f+sg)\|^2 < \infty$$

であるから, フビニの定理により, (7.37) の右辺の積分において dp 積分と $d\langle f, E_h(\lambda)g\rangle$ 積分は順序交換ができる. したがって

$$\frac{1}{2}\left\langle h^{-1/2}f, e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left\langle f, e^{i(t-s)p}(h^2+p^2)^{-1}g\right\rangle dp \quad (7.38)$$

が得られる. ゆえに, $\mathbb{R}$ 上の実数値急減少関数の空間

$$\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid u(t) \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\} \quad (7.39)$$

の任意の 2 つの元 u, v に対して

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(t)v(s)\left\langle h^{-1/2}f, e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\right\rangle dt\,ds\\ &\quad = \int_{\mathbb{R}}\left\langle (h^2+p^2)^{-1/2}\hat{u}(p)f, (h^2+p^2)^{-1/2}\hat{v}(p)g\right\rangle dp \end{aligned} \quad (7.40)$$

が成り立つ. ただし, $\hat{u}, \hat{v}$ はそれぞれ, u, v のフーリエ変換である. この式は, u, v が $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R})$ の元でなくても, $\hat{u}, \hat{v}$ が $\mathbb{R}$ 上の関数で $\hat{u}(p)f,\ \hat{v}(p)g \in D(h^{-1})$ かつ

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{u}(p)f\right\|^2 dp < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}}\left\|(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{v}(p)f\right\|^2 dp < \infty$$

を満たすものなら意味をもつことに注意しよう. そこで, $\mathcal{H}$ 値緩増加超関数の概念を導入する.

---

[5] 森口繁一・宇田川　久・一松　信,『数学公式 I』(岩波書店, 1956) の §60 を参照. 証明は留数定理を使えば簡単である (たとえば, 拙著,『複素解析とその応用』(共立出版, 2006) の (4.60) を参照).

7.3 ヒルベルト空間値緩増加超関数

$d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする．$\mathbb{R}^d$ 上の実数値の急減少関数の空間を $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ で表す：

$$\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mid u(x) \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}. \tag{7.41}$$

写像 $F : \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}$; $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto F(u) \in \mathcal{H}$ が線形かつ連続 (i.e. $u_n, u \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ について $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の位相で $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|F(u_n) - F(u)\| = 0$) であるとき，$F$ を $\mathbb{R}^d$ 上の **$\mathcal{H}$ 値緩増加超関数**という．$\mathbb{R}^d$ 上の $\mathcal{H}$ 値緩増加超関数の全体を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})$ と記す．

任意の $u = u_1 + iu_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), u_1, u_2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ に対しては

$$F(u) := F(u_1) + iF(u_2) \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{7.42}$$

と定義する．

■**例 7.7** $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上の実数値の連続線形汎関数を $\mathbb{R}^d$ 上の実緩増加超関数といい (上の定義で $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ の場合)，$\mathbb{R}^d$ 上の実緩増加超関数の全体を $\mathcal{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ と記す．各 $\psi \in \mathcal{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$F(u) := \psi(u)f, \quad u \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$$

とおけば，$F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})$ である．この場合，$F = \psi \times f$ と記す．

$F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})$ に対して，そのフーリエ変換 $\hat{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ を

$$\hat{F}(u) := F(\hat{u}), \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

によって定義することは，通常の緩増加超関数の場合と同様である．

■**例 7.8** 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\{t\}$ に台をもつデルタ超関数を $\delta_t \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R})$ で表す：

$$\delta_t(u) = u(t), \quad u \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}). \tag{7.43}$$

したがって，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\delta_t \times f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathcal{H})$ であり

$$\widehat{\delta_t \times f}(u) = \hat{u}(t)f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itp} u(p) f \, dp.$$

したがって，$\widehat{\delta_t \times f}$ は $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 値関数：$p \mapsto (2\pi)^{-1/2}e^{-itp}f$ と同一視できる．この意味で

$$\big(\widehat{\delta_t \times f}\big)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-itp}f, \quad p \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{H} \tag{7.44}$$

と記す．

(7.38) と (7.44) によって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle h^{-1/2}f, e^{-|t-s|h}h^{-1/2}g\rangle \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \Big\langle (h^2+p^2)^{-1/2}\widehat{\delta_t \times f}(p), (h^2+p^2)^{-1/2}\widehat{\delta_s \times g}(p)\Big\rangle\, dp\end{aligned} \tag{7.45}$$

と書ける．

そこで，$\mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathcal{H})$ の元 F で $\hat{F}$ が $\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 値関数であり，$\hat{F}(p) \in D((h^2+p^2)^{-1/2})$, a.e.$p$ かつ $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 値関数：$p \mapsto (h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p)$ は可測で

$$\int_{\mathbb{R}} \big\|(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p)\big\|^2 dp < \infty$$

を満たすものの全体を $\mathcal{H}_{h,-1}$ とする[6]．この集合は実ベクトル空間であり

$$\langle F, G\rangle_{h,-1} := 2\int_{\mathbb{R}} \Big\langle (h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p), (h^2+p^2)^{-1/2}\hat{G}(p)\Big\rangle\, dp \tag{7.46}$$

を内積とする実内積空間になる[7]．そこで，$\mathcal{H}_{h,-1}$ の完備化を考え，これを $\overline{\mathcal{H}}_{h,-1}$ で表す．$\overline{\mathcal{H}}_{h,-1}$ は可分な実ヒルベルト空間である[8]．

7.4　ユークリッド的量子場とファインマン–カッツ–ネルソンの公式

前節の結果により，$\overline{\mathcal{H}}_{h,-1}$ を添え字集合とするガウス超過程が存在する．これを $\{\phi_{\mathrm{E}}(F) \mid F \in \overline{\mathcal{H}}_{h,-1}\}$ とし，それが実現している確率空間を $(Q_{\mathrm{E}}, \mathfrak{B}_{\mathrm{E}}, \mu_{\mathrm{E}})$ と

---

[6] $\mathcal{K}$ を $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上の可分なヒルベルト空間，$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間，$F: X \to \mathcal{K}$ を X 上の $\mathcal{K}$ 値関数とする．任意の $\psi \in \mathcal{K}$ に対して，$\langle \psi, F(x)\rangle_{\mathcal{K}}$ が x の $\mathfrak{B}$ 可測関数であるとき，F は可測であるという．この型の関数の基本的性質については，新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の 4.1.4 項を参照されたい．

[7] 「$\langle F, F\rangle_{h,-1} = 0 \Longrightarrow F = 0$」以外の内積の性質は容易に示される．$\langle F, F\rangle_{h,-1} = 0$ ならば $\int_{\mathbb{R}} \|(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p)\|^2\, dp = 0$ であるから，$\|(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p)\| = 0$, a.e.$p$. したがって，$(h^2+p^2)^{-1/2}\hat{F}(p) = 0$, a.e.$p$. 左から $(h^2+p^2)^{1/2}$ を作用させれば，$\hat{F}(p) = 0$, a.e.p となる．$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の場合と同様にして，これから，$F = 0$ が導かれる．

[8] $C_0^\infty(\mathbb{R}_p\backslash\{0\}) := \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_p) \mid \operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}_p\backslash\{0\}\}$ は $L^2(\mathbb{R}_p)$ で稠密であるから，$C_0^\infty(\mathbb{R}_p\backslash\{0\})$ の元 u_n からなる $L^2(\mathbb{R}_p)$ の CONS $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ がとれる．$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathcal{H}$ の CONS とすれば ($e_n \in D(h), n \in \mathbb{N}$)，$\{\check{u}_n \times e_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ($\check{u}$ は u の逆フーリエ変換) から生成される部分空間は $\mathcal{H}_{h,-1}$ で稠密であることがわかる．

記す．すでに見たように，任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ に対して，$\delta_t \times f \in \overline{\mathcal{H}}_{h,-1}$ である．したがって，確率変数

$$\phi_{\mathrm{E}}(t,f) := \phi_{\mathrm{E}}(\delta_t \times f) \tag{7.47}$$

を導入すれば，$\mathcal{H}_{h,-1}$ の構成と定理 7.6 およびガウス超過程の性質により，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ に対して

$$\begin{aligned} S_n(t_1, f_1, \cdots, t_n, f_n) &= \int_{Q_{\mathrm{E}}} \phi_{\mathrm{E}}(t_1, f_1) \cdots \phi_{\mathrm{E}}(t_n, f_n)\, d\mu_{\mathrm{E}} \\ &= \langle \phi_{\mathrm{E}}(t_1, f_1) \cdots \phi_{\mathrm{E}}(t_n, f_n) \rangle \end{aligned} \tag{7.48}$$

が成立することになる．そこで，$\phi_{\mathrm{E}}(t,f)$ を自由場 $\phi(t,f)$ に付随する**自由なユークリッド的量子場**と呼ぶ．こうして，自由場のシュヴィンガー関数は自由なユークリッド的量子場の期待値で表される．

関係式 (7.48) を一般化しよう．

【定理 7.9】 $k \in \mathbb{N}$, $f_\ell \in \mathcal{H}_{-1/2}$ $(\ell = 1, \cdots, k)$ とする．G_j $(j = 1, \cdots, n)$ を $\mathbb{R}^k$ 上の任意の有界なボレル可測関数とし

$$G_j^{(0)} := G_j(\phi_0(f_1), \cdots, \phi_0(f_k)), \tag{7.49}$$

$$G_j(t_j) := G_j(\phi_{\mathrm{E}}(t_j, f_1), \cdots, \phi_{\mathrm{E}}(t_j, f_k)) \tag{7.50}$$

とおく．$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$ とする（$n \ge 2$ は任意）．このとき

$$\begin{aligned} &\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} G_2^{(0)}\, e^{-(t_3-t_2)H_{\mathrm{b}}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H_{\mathrm{b}}} G_n^{(0)} \Omega \right\rangle \\ &\quad = \int_{Q_{\mathrm{E}}} G_1(t_1) \cdots G_n(t_n)\, d\mu_{\mathrm{E}}. \end{aligned} \tag{7.51}$$

証明 $g_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ $(j = 2, \cdots, n)$ とする． 任意の $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &\phi_0(f)^m e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} \\ &\quad = \phi_0(f)\, e^{-(t_1-t_1)H_{\mathrm{b}}} \phi_0(f)\, e^{-(t_1-t_1)H_{\mathrm{b}}} \cdots e^{-(t_1-t_1)H_{\mathrm{b}}} \phi_0(f)\, e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} \end{aligned}$$

であるから，(7.48) から

$$\big\langle \Omega, \phi_0(f)^m\, e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} \phi_0(g_2)\, e^{-(t_3-t_2)H_{\mathrm{b}}}$$

$$\times \cdots \phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n - t_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(g_n)\Omega\rangle$$
$$= \langle \phi_\mathrm{E}(t_1, f)^m \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n)\rangle$$

を得る．したがって，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\langle \Omega, \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{i^m \phi_0(f)^m}{m!} \right) e^{-(t_2 - t_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(g_2)\, e^{-(t_3 - t_2)H_\mathrm{b}} \right.$$
$$\left. \times \cdots \phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n - t_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(g_n)\Omega \right\rangle$$
$$= \left\langle \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{i^m \phi_\mathrm{E}(t_1, f)^m}{m!} \right) \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n) \right\rangle. \tag{7.52}$$

定理 6.9-(iii) によって

$$\lim_{N \to \infty} [(7.52)\ \text{の左辺}]$$
$$= \langle \Omega, e^{i\phi_0(f)}\, e^{-(t_2 - t_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(g_2)\, e^{-(t_3 - t_2)H_\mathrm{b}}$$
$$\times \cdots \phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n - t_{n-1})H_\mathrm{b}} \phi_0(g_n)\Omega\rangle.$$

他方

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{i^m \phi_\mathrm{E}(t_1, f)^m}{m!} \right) \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n)$$
$$= e^{i\phi_\mathrm{E}(t_1, f)} \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n), \quad \mu_\mathrm{E}\text{-a.e.}$$

かつ

$$\left| \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{i^m \phi_\mathrm{E}(t_1, f)^m}{m!} \right) \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n) \right|$$
$$\leq e^{|\phi_\mathrm{E}(t_1, f)|} |\phi_\mathrm{E}(t_2, g_2)| \cdots |\phi_\mathrm{E}(t_n, g_n)|$$

であり，この式の右辺は μ_E について可積分である．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N \to \infty} [(7.52)\ \text{の右辺}] = \langle e^{i\phi(t_1, f)} \phi_\mathrm{E}(t_2, g_2) \cdots \phi_\mathrm{E}(t_n, g_n)\rangle$$

が成立する．したがって

$$\langle \Omega, e^{i\phi_0(f)}\, e^{-(t_2 - t_1)H_\mathrm{b}} \phi_0(g_2)\, e^{-(t_3 - t_2)H_\mathrm{b}}$$

$$\times \cdots \phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_b}\phi_0(g_n)\Omega\big\rangle$$
$$= \big\langle e^{i\phi_E(t_1,f)}\phi_E(t_2,g_2)\cdots\phi_E(t_n,g_n)\big\rangle. \tag{7.53}$$

そこで，$p_j\in\mathbb{R}$, $f_j\in\mathcal{H}_{-1/2}$ として，$f=\sum_{j=1}^m p_jf_j$ とすれば

$$\big\langle\Omega, e^{i\sum_{j=1}^k p_j\phi_0(f_j)}\, e^{-(t_2-t_1)H_b}\phi_0(g_2)\, e^{-(t_3-t_2)H_b}$$
$$\times\cdots\phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_b}\phi_0(g_n)\Omega\big\rangle$$
$$= \left\langle e^{i\sum_{j=1}^k p_j\phi_E(t_1,f_j)}\phi_E(t_2,g_2)\cdots\phi_E(t_n,g_n)\right\rangle. \tag{7.54}$$

さて，まず，G_j $(j=1,\cdots,n)$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ の元である場合を考える．このとき

$$G_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_{\mathbb{R}^k} e^{i\sum_{\ell=1}^k p_\ell x_\ell}\hat{G}_j(p)\,dp$$

と書ける．作用素解析により

$$G_j(\phi_0(f_1),\cdots,\phi_0(f_k)) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\ \text{s-}\int_{\mathbb{R}^k} e^{i\sum_{\ell=1}^k p_\ell\phi_0(f_\ell)}\hat{G}_j(p)\,dp$$

が成り立つことがわかる（付録 C の定理 C.7；s-$\int$ は強リーマン積分を表す)）．そこで，(7.54) の両辺に $(2\pi)^{-k/2}\hat{G}_1(p)$ をかけて積分すれば

$$\langle\Omega, G_1(\phi_0(f_1),\cdots,\phi_0(f_k))\, e^{-(t_2-t_1)H_b}\phi_0(g_2)\, e^{-(t_3-t_2)H_b}$$
$$\times\cdots\phi_0(g_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_b}\phi_0(g_n)\Omega\rangle$$
$$= \langle G_1(\phi_E(t_1,f_1),\phi_E(t_1,f_2),\cdots,\phi_E(t_1,f_k))\phi_E(t_2,g_2)\cdots\phi_E(t_n,g_n)\rangle. \tag{7.55}$$

が得られる．以下，順に $j=2,3,\cdots,n$ の場合を考え，いまと同様な議論を行うことにより，(7.51) が証明される．

次に G_1 が有界な台をもつ連続関数の場合を考える．関数 $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ で

$$\operatorname{supp}\rho\subset\left\{x\in\mathbb{R}^k\mid |x|\le 1\right\},\quad \rho(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^k,\quad \int_{\mathbb{R}^k}\rho(x)\,dx=1$$

となるものをとり，$\varepsilon>0$ に対して

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^k}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad G_{1,\varepsilon}(x)=\rho_\varepsilon * G_1$$

とおく．このとき，$G_{1,\varepsilon}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ であり

$$|G_{1,\varepsilon}(x)|\le\|G_1\|_\infty,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}G_{1,\varepsilon}(x)=G_1(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^k$$

が成り立つ[9]. 上の結果により

$$\left\langle \Omega, G_{1,\varepsilon}^{(0)} e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} G_2^{(0)} e^{-(t_3-t_2)H_{\mathrm{b}}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H_{\mathrm{b}}} G_n^{(0)} \Omega \right\rangle$$
$$= \langle G_{1,\varepsilon}(t_1) \cdots G_n(t_n) \rangle .$$

作用素解析により，$\text{s-}\lim_{\varepsilon\to 0} G_{1,\varepsilon}^{(0)} = G_1^{(0)}$. また，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle G_{1,\varepsilon}(t_1) \cdots G_n(t_n) \rangle = \langle G_1(t_1) \cdots G_n(t_n) \rangle .$$

したがって，(7.51) は G_1 が有界な台をもつ連続関数で $G_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ $(j = 2, \cdots, n)$ の場合に成立する.

G_1 が単に有界な連続関数な場合は，有界な台をもつ連続関数列 $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{N\to\infty} u_N(x) = G_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^k, \quad |u_N(x)| \le |G_1(x)|,\ \forall x \in \mathbb{R}^k$$

となるものがとれる. 前段の議論により，(7.51) において，G_1 が u_N で $G_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ $(j = 2, \cdots, n)$ の場合の式が成立する. 作用素解析により，$\text{s-}\lim_{N\to\infty} u_N^{(0)} = G_1^{(0)}$ であり，再び，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N\to\infty} \langle u_N(t_1) \cdots G_n(t_n) \rangle = \langle G_1(t_1) \cdots G_n(t_n) \rangle$$

となるので，G_1 が $\mathbb{R}^k$ 上の有界な連続関数で $G_2, \cdots, G_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ の場合の (7.51) が成立する. 以下，同様の議論を $G_2, G_3, \cdots, G_n$ について行うことにより，G_j $(j = 1, \cdots, n)$ が有界な連続関数の場合に関する (7.51) に到達する.

最後に，G_j $(j = 1, \cdots, n)$ が有界な可測関数の場合にも (7.51) が成立することを証明する. 任意の有界な可測関数は階段関数の各点極限で表されるから，上と同様の極限議論を行うことにより，$G_1, \cdots, G_n$ がボレル集合の定義関数である場合について (7.51) を示せば十分である. B が非有界なボレル集合ならば，$B_N := \{x \in B \mid |x| \le N\}$ は有界なボレル集合であり，$0 \le \chi_{B_N}(x) \le \chi_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$ かつ $\lim_{N\to\infty} \chi_{B_N}(x) = \chi_B(x), \forall x \in \mathbb{R}^k$ が成り立つ. したがって，前段と同様の議論により，結局，B_j を任意の有界ボレル集合として，$G_j = \chi_{B_j}$ について (7.51) を示せばよい. 任意の $\varepsilon_j > 0$ に対して，$G_{j,\varepsilon_j} := \rho_{\varepsilon_j} * \chi_{B_j}$ とすれば，これは有界な連続関数であるから前段で得た結果により

$$\left\langle \Omega, G_{1,\varepsilon_1}^{(0)}\, e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}} G_{2,\varepsilon_2}^{(0)}\, e^{-(t_3-t_2)H_{\mathrm{b}}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H_{\mathrm{b}}} G_{n,\varepsilon_n}^{(0)} \Omega \right\rangle$$

[9] 新井朝雄・江沢 洋,『量子力学の数学的構造 I, II』(朝倉書店, 1999) の付録 C, 命題 C.5 の証明を参照.

$$= \int_{Q_{\mathrm{E}}} G_{1,\varepsilon_1}(t_1) \cdots G_{n,\varepsilon_n}(t_n)\, d\mu_{\mathrm{E}} \tag{7.56}$$

が成り立つ．そこで，順に，極限 $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, \cdots, \varepsilon_n \to 0$ をとれば，$G_j = \chi_{B_j}$ のときの (7.51) が得られる． ∎

定理 7.9 に述べられた型の関係式を総称的に**ファインマン–カッツ–ネルソン (FKN) の公式**と呼ぶ．

7.5　ユークリッド的量子場の連続性

これまでは自由場の理論を考察してきた．これは第 4 章で論じた有限自由度の量子力学の文脈でいえば，自由粒子の理論に相当する部分である．そこで，量子的粒子に対してポテンシャル V による相互作用を加えたシュレーディンガー作用素 H_V を考えたように，量子場の理論の場合にも自由場のハミルトニアン $H_{\mathrm{b}} = d\Gamma(h)$ に量子場どうしの相互作用を付加した作用素を考察するのは自然である．これは，純理論的に興味があるだけでなく，量子数理物理学への応用においても重要である．だが，この場合，4.8 節において，$\overline{H}_V$ に関するファインマン–カッツ公式を導いたときにブラウン運動 $b(t)$ の t に関する連続性が必要であったように，自由なユークリッド的量子場 $\phi_{\mathrm{E}}(t,f)$ の t に関する連続性を調べておく必要がある．

【補題 7.10】　任意の $t \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ および $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ に対して，$\phi_{\mathrm{E}}(t+\varepsilon, f) - \phi_{\mathrm{E}}(t,f)$ は平均 0，分散 $\langle h^{-1/2}f, (1-e^{-\varepsilon h})h^{-1/2}f\rangle$ のガウス型確率変数である．さらに

$$\langle |\phi_{\mathrm{E}}(t+\varepsilon, f) - \phi_{\mathrm{E}}(t,f)|^p\rangle \le c_p d_p \|f\|^p \varepsilon^{p/2}, \quad \forall p > 0 \tag{7.57}$$

が成り立つ．ただし，c_p は (1.23) によって定義される定数であり

$$d_p := \left(\sup_{x>0} \frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{p/2} \tag{7.58}$$

である．

証明　$X := \phi_{\mathrm{E}}(t+\varepsilon, f) - \phi_{\mathrm{E}}(t,f)$ とおけば，任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，$\xi X = \phi_{\mathrm{E}}(\xi(\delta_{t+\varepsilon} - \delta_t) \times f)$ であるから，

$$\left\langle e^{i\xi X}\right\rangle = e^{-\xi^2\|(\delta_{t+\varepsilon}-\delta_t)\times f\|_{h,-1}^2/4}$$
$$= e^{-\xi^2\left\langle h^{-1/2}f,\ (1-e^{-\varepsilon h})h^{-1/2}f\right\rangle/2}.$$

これは補題の前半の主張を意味する．

後半については，まず，命題 1.13 によって

$$\langle|\phi_{\mathrm{E}}(t+\varepsilon,f)-\phi_{\mathrm{E}}(t,f)|^p\rangle = c_p\left\langle h^{-1/2}f,(1-e^{-\varepsilon h})h^{-1/2}f\right\rangle^{p/2}$$

が成り立つ．$A=\varepsilon h$ とおけば，作用素解析により

$$\left\langle h^{-1/2}f,(1-e^{-\varepsilon h})h^{-1/2}f\right\rangle^{p/2}$$
$$=\varepsilon^{p/2}\left\langle A^{-1/2}f,(1-e^{-A})A^{-1/2}f\right\rangle^{p/2}\le\varepsilon^{p/2}d_p\|f\|^p.$$

したがって，(7.57) が成り立つ．■

補題 7.10 と系 2.23 によって（定理 4.15 の証明を参照），任意の $\alpha\in(0,1/2)$ に対して，$\phi_{\mathrm{E}}(t,f)$ は指数 α のヘルダー連続版を同じ確率空間上にもつ．これも同じ記号で記す．したがって

$$|\phi_{\mathrm{E}}(t,f)-\phi_{\mathrm{E}}(s,f)|\le C_\omega|t-s|^\alpha,\quad \mu_E\text{-a.e.}\omega\in Q_{\mathrm{E}},\quad t,s\in\mathbb{R}. \tag{7.59}$$

ただし，C_ω は f と ω による定数である．

7.6　相互作用モデル

$g=(g_1,\cdots,g_N)\in\oplus^N\mathcal{H}_{-1/2}$ を固定し，$V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．定理 6.12-(vi) によって，$\{\phi_0(g_1),\cdots,\phi_0(g_N)\}$ は強可換であるので，作用素解析により，$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上の自己共役作用素

$$V_g:=V(\phi_0(g_1),\cdots,\phi_0(g_N)) \tag{7.60}$$

が定まる．これは量子場 $\phi_0(g_1),\cdots,\phi_0(g_N)$ をいわば “素材” とする相互作用を記述する作用素の 1 つである．この相互作用のもとにある系のハミルトニアンは

$$H:=H_{\mathrm{b}}+V_g \tag{7.61}$$

によって定義される．もちろん，これが実際にハミルトニアンであるためには，その自己共役性または本質的自己共役性が示されねばならない（後者の場合，その閉包 $\bar{H}$ によってハミルトニアンが定義される）．だが，ここでは，この問題には立ち入らないことにし，次を仮定する：

(H.1) ある稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset D(H)[= D(H_\mathrm{b}) \cap D(V_g)]$ があって，H は $\mathcal{D}$ 上で本質的に自己共役かつ下に有界である．

この仮定は，たとえば，V が有界ならば満たされる（加藤–レリッヒの定理の特別な場合）．他の場合については，自己共役性の問題に関する一般理論の応用により，しかるべき条件のもとで，仮定 (H) が成立するような V のクラスを同定することが可能である[10]．

■**例 7.11（ファン・ホーフェモデル，再訪）** $V(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ の場合，$V_g = \phi_0(g_1)$ であり，したがって，$H = H_\mathrm{b} + \phi_0(g_1)$ である．これは，6.10 節で考察した作用素 H_g の特別な場合である（$g = h^{-1/2}g_1$）．したがって，$g_1 \in D(h^{-1})$ ならば，定理 6.33-(i) によって，条件 (H.1) は満たされる．

■**例 7.12** $\lambda \in \mathbb{R}$ として，$V(x) = x + \lambda x^2$, $x \in \mathbb{R}$ とすれば，$V_g = \phi_0(g_1) + \lambda\phi_0(g_1)^2$ である．したがって，$H = H_\mathrm{b} + \phi_0(g_1) + \lambda\phi_0(g_1)^2$．これは，6.10 節で考察した作用素 $H_g(\lambda)$ の特別な場合である（$g = h^{-1/2}g_1$）．したがって，$g_1 \in D(h^{-1}) \cap D(h^{1/2})$ で $|\lambda|$ が十分小ならば，定理 6.33-(ii) によって，条件 (H.1) は満たされる．

■**例 7.13** 例 7.12 をやや一般化したモデルとして，n を任意の自然数として $V(x) = \sum_{j=1}^{2n} a_j x^j$ ($a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, 2n$) の場合がある．この場合

$$H = H_\mathrm{b} + \sum_{j=1}^{2n} a_j \phi_0(g_1)^j$$

となる．$n \geq 2$ のとき，(H.1) が満たされるか否かは全然自明な問題ではなく，詳しい緻密な解析が必要とされる．詳細は省略するが，$n = 2$, $a_4 > 0$ のときは，(H.1) は満たされる[11]．

各 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$V_g(t) := V(\phi_\mathrm{E}(t, g_1), \cdots, \phi_\mathrm{E}(t, g_N)) \tag{7.62}$$

[10] 拙著，『量子現象の数理』（朝倉書店，2006）の第 2 章や『フォック空間と量子場 下』（日本評論社，2000）の第 13 章を参照されたい．

[11] A. Arai, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 2082–2088，定理 3.2 の応用．

とおく．V の連続性により，$V_g(t)$ は μ_{E}-a.e. の点に対して t について連続である．したがって，μ_{E}-a.e. の点に対して，リーマン積分 $\int_0^t V_g(s)\,ds$ が定義される．

【定理 7.14】 V は $\mathbb{R}^N$ 上で連続かつ下に有界で，条件 (H.1) が満たされるとする．$G_j^{(0)}, G_j(t_j)$ を定理 7.9 のものとする．このとき，次の式が成り立つ：

$$\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-t\bar{H}} G_2^{(0)}\Omega \right\rangle = \left\langle G_1(0) G_2(t)\, e^{-\int_0^t V_g(s)\,ds} \right\rangle, \quad \forall t > 0, \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle \Omega, e^{-t_1\bar{H}} G_1^{(0)}\, e^{-(t_2-t_1)\bar{H}} G_2^{(0)}\, e^{-(t_3-t_2)\bar{H}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\bar{H}} G_n^{(0)}\Omega \right\rangle \\ &\quad = \left\langle G_1(t_1)\cdots G_n(t_n)\, e^{-\int_0^{t_n} V_g(s)\,ds} \right\rangle, \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n.\end{aligned} \tag{7.64}$$

証明　トロッター–加藤の積公式（付録 C，定理 C.22）により

$$e^{-t\bar{H}} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{-tH_{\mathrm{b}}/n}\, e^{-tV_g/n} \right)^n \tag{7.65}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\left\langle \Omega, G_1^{(0)} e^{-t\bar{H}} G_2^{(0)}\Omega \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-tH_{\mathrm{b}}/n}\, e^{-tV_g/n}\, e^{-tH_{\mathrm{b}}/n}\, e^{-tV_g/n} \cdots e^{-tH_{\mathrm{b}}/n}\, e^{-tV_g/n} G_2^{(0)}\Omega \right\rangle.\end{aligned}$$

そこで，右辺に対して，定理 7.9 を応用すれば（$t_1 = 0, t_2 = t/n, t_3 = 2t/n, t_4 = 3t/n, \cdots$，として応用）

$$\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-t\bar{H}} G_2^{(0)}\Omega \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle G_1(0) G_2(t)\, e^{-\sum_{j=1}^n tV_g(jt/n)} \right\rangle$$

と書ける．$c = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > -\infty$ とすれば，$e^{-\sum_{j=1}^n tV_g(jt/n)} \le e^{-ct}$ であるから，ルベーグの優収束定理により，右辺は $\left\langle G_1(0) G_1(t)\, e^{-\int_0^t V_g(s)\,ds} \right\rangle$ となる．したがって，(7.63) が成立する．

(7.64) については，次のように進める．トロッター–加藤の積公式により

$$\begin{aligned}&\left\langle \Omega, e^{-t_1\bar{H}} G_1^{(0)}\, e^{-(t_2-t_1)\bar{H}} G_2^{(0)}\, e^{-(t_3-t_2)\bar{H}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\bar{H}} G_n^{(0)}\Omega \right\rangle \\ &\quad = \lim_{N_n\to\infty} \cdots \lim_{N_1\to\infty} \left\langle \Omega, \left(e^{-t_1 H_{\mathrm{b}}/N_1}\, e^{-t_1 V_g/N_1} \right)^{N_1} \right. \\ &\qquad \times G_1^{(0)} \left(e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{b}}/N_2}\, e^{-(t_2-t_1)V_g/N_2} \right)^{N_2} G_2^{(0)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \cdots \left(e^{-(t_n-t_{n-1})H_{\mathrm{b}}/N_n}\, e^{-(t_n-t_{n-1})V_g/N_n}\right)^{N_n} G_n^{(0)}\Omega\Big\rangle \\
&= \lim_{N_n\to\infty} \cdots \lim_{N_1\to\infty} \Big\langle e^{-\sum_{j_1=1}^{N_1} V_g(j_1t_1/N_1)t_1/N_1} \\
&\quad \times G_1(t_1)\, e^{-\sum_{j_2=1}^{N_2} V_g(t_1+(t_2-t_1)j_2/N_2)(t_2-t_1)/N_2} \\
&\quad \times G_2(t_2)\cdots e^{-\sum_{j_n=1}^{N_n} V_g(t_{n-1}+(t_n-t_{n-1})/N_n)(t_n-t_{n-1})/N_n} G_n(t_n)\Big\rangle \\
&= \Big\langle e^{-\int_0^{t_1} V_g(s)\,ds} G_1(t_1)\, e^{-\int_{t_1}^{t_2} V_g(s)\,ds} G_2(t_2)\cdots e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n} V_g(s)\,ds} G_n(t_n)\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

そこで，指数の積分を整理すれば (7.64) が得られる． ∎

次に V が下に有界ではない場合を考察する．この場合，汎関数積分表示 (7.64) を導くには，付加的な条件が必要である：

(H.2) (H.1) における $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D} \subset D(H_{\mathrm{b}}) \cap D(V_g^2)$ を満たし，実数 $\lambda_0 > 0$ があって，$0 \le \lambda < \lambda_0$ ならば

$$H(\lambda) := H + \lambda V_g^2 = H_{\mathrm{b}} + V_g + \lambda V_g^2 \tag{7.66}$$

は $\mathfrak{D}$ 上で本質的に自己共役である．

明らかに

$$H(0) := H \tag{7.67}$$

次の補題に注意する．

【補題 7.15】 $\lambda \downarrow 0$ のとき，$H(\lambda)$ は H に強レゾルヴェント収束する[12]．特に，任意の $t > 0$ に対して

$$\text{s-}\lim_{\lambda\downarrow 0} e^{-t\overline{H(\lambda)}} = e^{-t\bar{H}}. \tag{7.68}$$

証明 容易にわかるように，任意の $\psi \in \mathfrak{D}$ に対して

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \overline{H(\lambda)}\psi = \bar{H}\psi.$$

$\mathfrak{D}$ は $\bar{H}$ の芯であるから，付録 C の定理 C.20 を応用することにより，求める結果が得られる． ∎

[12] 付録 C，C.6 節を参照．

【定理 7.16】 V は $\mathbb{R}^N$ 上で連続で下に有界でないとする．また，条件 (H.1), (H.2) が成立するとする．$G_j^{(0)}, G_j(t_j)$ を定理 7.9 のものとしよう．このとき，(7.63), (7.64) が成り立つ．

証明　(7.63), (7.64) は $G_j \geq 0$ の場合について示せば十分である．そこで，$G_j \geq 0$ とする．$U(\lambda)(x) := V(x) + \lambda V(x)^2$ とおけば $U(\lambda)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の連続関数であり，下に有界である．定理 7.14 の V として，$U(\lambda)$ をとることにより

$$\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-t\overline{H(\lambda)}} G_2^{(0)} \Omega \right\rangle = \left\langle G_1(0) G_2(t)\, e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\, ds} \right\rangle$$

が成り立つ．補題 7.15 によって，左辺は，$\lambda \downarrow 0$ のとき，$\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-t\bar{H}} G_2^{(0)} \Omega \right\rangle$ に収束するから

$$\left\langle \Omega, G_1^{(0)}\, e^{-t\bar{H}} G_2^{(0)} \Omega \right\rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \left\langle G_1(0) G_2(t)\, e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\, ds} \right\rangle.$$

$U(\lambda)_g(s)$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき，単調減少であるから，$e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\, ds}$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき単調増加であり

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\, ds} = e^{-\int_0^t V_g(s)\, ds} \leq \infty, \quad \mu_{\mathrm{E}}\text{-a.e.}$$

したがって，単調収束定理により，(7.63) が得られる．(7.64) についても同様である．　■

7.7　Q 表示における FKN 公式

ハミルトニアン H に関する性質を FKN 公式に代表される汎関数積分表示を用いて解析する場合，ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ における諸量を Q 表示を用いて表しておくと便利な場合がある．そこで，この節では，この対応を調べておく．これは，定理 6.34 を応用することによりなされる．

いま，$\mathcal{H}$ を添え字集合とするガウス超過程 $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{H}\}$ を考え，これが実現している確率空間を $(Q_{\mathcal{H}}, \Sigma_{\mathcal{H}}, \mu_{\mathcal{H}})$ とする．このとき，定理 6.34 を満たすユニタリ変換 $U : \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \to L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ が存在する．そこで，各 $f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ に対して確率変数 $\phi_{\mathrm{F}}(f)$ を

$$\phi_{\mathrm{F}}(f) := \phi(h^{-1/2} f) \tag{7.69}$$

によって定義すれば，定理 6.34 によって，次が成立する：

(i) すべての $n \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して．

$$Ua(h^{-1/2}f_1)^* \cdots a(h^{-1/2}f_n)^*\Omega = 2^{n/2} : \phi_{\mathrm{F}}(f_1) \cdots \phi_{\mathrm{F}}(f_n) : . \tag{7.70}$$

(ii) $U\phi_0(f)U^{-1} = \phi_{\mathrm{F}}(f), \quad f \in \mathcal{H}_{-1/2}$.

(ii) によって，$\phi_{\mathrm{F}}(f)$ は Q 表示の形式における時刻 0 の量子場と解釈される．

実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{H}_{-1/2}$ は

$$\langle f, g\rangle_{-1/2} := \left\langle h^{-1/2}f, h^{-1/2}g\right\rangle_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathcal{H}_{-1/2} \tag{7.71}$$

を内積とする実内積空間と見ることができる．この内積空間の完備化を $\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ で表す．完備化の定義により，任意の $f \in \bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ に対して，$f_n \in \mathcal{H}_{-1/2}$ で $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{-1/2} = 0$ となるものが存在する．一方

$$\|\phi_{\mathrm{F}}(f_n) - \phi_{\mathrm{F}}(f_m)\|^2_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} = \frac{1}{2}\|f_n - f_m\|^2_{-1/2}$$

であるから，$\{\phi_{\mathrm{F}}(f_n)\}_n$ は $L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ のコーシー列である．したがって，$\tilde{\phi}_{\mathrm{F}}(f) \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\mathrm{F}}(f_n) = \tilde{\phi}_{\mathrm{F}}(f)$$

が成り立つ．$\tilde{\phi}_{\mathrm{F}}(f)$ が $\{f_n\}_n$ の選び方によらないことも容易にわかる．また，$f \in \mathcal{H}_{-1/2}$ ならば，$f_n = f, n \in \mathbb{N}$ ととれるから，$\tilde{\phi}_{\mathrm{F}}(f) = \phi_{\mathrm{F}}(f)$ である．こうして，$\{\phi_{\mathrm{F}}(f) \mid f \in \mathcal{H}_{-1/2}\}$ を含む確率変数の族 $\{\tilde{\phi}_{\mathrm{F}}(f) \mid f \in \bar{\mathcal{H}}_{-1/2}\}$ が得られる．これは $\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ を添え字集合とするガウス超過程である．

次に，$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ と $L^2(Q_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}})$ の関係を見るために，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，写像 $j_t : \mathcal{H}_{-1/2} \to \mathcal{H}_{h,-1}$ を

$$j_t f := \delta_t \times f, \quad f \in \mathcal{H}_{-1/2} \tag{7.72}$$

によって定義する．このとき，(7.45) と (7.46) によって

$$\langle j_t f, j_s g\rangle_{h,-1} = \left\langle f, e^{-|t-s|h} g\right\rangle_{-1/2}, \quad f, g \in \mathcal{H}_{-1/2} \tag{7.73}$$

が成り立つ．特に，$s=t$ とすれば，j_t は等距離作用素であることがわかる．したがって，j_t は $\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ から $\bar{\mathcal{H}}_{h,-1}$ への等距離作用素に一意的に拡張される．この拡張も j_t と記す．このとき，(7.73) は，$\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ 上の作用素の等式

$$j_t^* j_s = e^{-|t-s|h}, \quad s,t \in \mathbb{R} \tag{7.74}$$

を意味する．

j_t は等距離作用素であるから，等距離作用素 $J_t : L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}) \to L^2(Q_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}})$ で

$$J_t 1 = 1, \tag{7.75}$$

$$J_t : \phi_{\mathrm{F}}(f_1)\cdots\phi_F(f_n) :=: \phi_{\mathrm{E}}(j_t f_1)\cdots\phi_{\mathrm{E}}(j_t f_n) :, \quad n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H}_{-1/2},\ j=1,\cdots,n \tag{7.76}$$

を満たすものがただ1つ存在する[13]．

【定理 7.17】　各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，J_t は正値性保存作用素である．すなわち，任意の $\psi \in L^2(Q_{\mathrm{F}}, d\mu_{\mathcal{H}})$, $\psi \geq 0$ に対して $J_t\psi \geq 0$.

さらに，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{R}^n$ 上の任意の有界なボレル可測関数 G およびすべての $f_j \in \mathcal{H}_{-1/2}$，$(j=1,\cdots,n)$ に対して

$$J_t G(\phi_{\mathrm{F}}(f_1),\cdots,\phi_{\mathrm{F}}(f_n)) = G(\phi_{\mathrm{E}}(t,f_1),\cdots,\phi_{\mathrm{E}}(t,f_n)) \tag{7.77}$$

が成り立つ．

証明　定理 6.36 の証明とまったく同様．　∎

自由場のハミルトニアン $H_{\mathrm{b}} = d\Gamma(h)$ の $L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ での表示を $H_{0,\mathrm{F}}$ とする（6.12 節を参照）：

$$H_{0,\mathrm{F}} := UH_{\mathrm{b}}U^{-1} = d\Gamma_{\mathrm{S}}(h). \tag{7.78}$$

---

[13] 自然な同型 $U_1 : L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}) \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}((\bar{\mathcal{H}}_{-1/2})_{\mathbb{C}})$，$U_2 : L^2(Q_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}((\mathcal{H}_{h,-1})_{\mathbb{C}})$ を用いるならば，j_t の第2種の第2量子化 $\Gamma(j_t) : \mathcal{F}_{\mathrm{b}}((\bar{\mathcal{H}}_{-1/2})_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}((\mathcal{H}_{h,-1})_{\mathbb{C}})$ のユニタリ変換 $J_t := U_2^{-1}\Gamma(j_t)U_1$ が求めるものである．もちろん，(7.75), (7.76) と線形性により，J_t を定義し（この場合，この定義が意味をもつことを検証する必要がある），これが等距離作用素であることを示してもよい．

同様に

$$H_{\mathrm{F}} := U\bar{H}U^{-1} \tag{7.79}$$

とする.

【定理 7.18】 $t > s,\ t, s \in \mathbb{R}$ ならば

$$e^{-(t-s)H_{0,\mathrm{F}}} = J_s^* J_t. \tag{7.80}$$

証明 $t > s$ とする. G を $\mathbb{R}^k$ 上の任意の有界なボレル可測関数とし

$$\begin{aligned}
&G^{(0)} := G(\phi_0(f_1), \cdots, \phi_0(f_k)),\\
&G^{\mathrm{F}} := G(\phi_{\mathrm{F}}(f_1), \cdots, \phi_{\mathrm{F}}(f_k)),\\
&G(t) := G(\phi_{\mathrm{E}}(t, f_1), \cdots, \phi_{\mathrm{E}}(t, f_k),\\
&f_j \in \mathcal{H}_{-1/2},\ j = 1, \cdots, k
\end{aligned}$$

とおく. このとき

$$\left\langle G^{(0)}\Omega, e^{-(t-s)H_{\mathrm{b}}} G^{(0)}\Omega \right\rangle = \left\langle G^{\mathrm{F}}, e^{-(t-s)H_{0,\mathrm{F}}} G^{\mathrm{F}} \right\rangle.$$

一方, 左辺は, FKN 公式と (7.77) により

$$\langle G(s), G(t) \rangle = \left\langle J_s G^{\mathrm{F}}, J_t G^{\mathrm{F}} \right\rangle = \left\langle G^{\mathrm{F}}, J_s^* J_t G^{\mathrm{F}} \right\rangle$$

に等しい. したがって

$$\left\langle G^{\mathrm{F}}, e^{-(t-s)H_{0,\mathrm{F}}} G^{\mathrm{F}} \right\rangle = \left\langle G^{\mathrm{F}}, J_s^* J_t G^{\mathrm{F}} \right\rangle.$$

部分空間

$$\mathcal{L}\left(\left\{ G^{\mathrm{F}} \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathcal{H}_{-1/2},\ j = 1, \cdots, k,\ G \text{ は} \\ \mathbb{R}^k \text{ 上の有界なボレル可測関数} \end{array} \right\}\right)$$

は $L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ で稠密であるから, (7.80) が得られる. ∎

【定理 7.19】 V は $\mathbb{R}^N$ 上で連続かつ下に有界で条件 (H.1) が成立するとする．このとき，すべての $t>0$ と $\phi, \psi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ に対して

$$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle = \int_{Q_{\mathrm{E}}} (J_0\phi)^*(J_t\psi)\, e^{-\int_0^t V_g(s)\,ds}\, d\mu_{\mathrm{E}}. \tag{7.81}$$

証明　(7.63) と (7.77) により，(7.81) はある稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ に属する任意のベクトル ψ, ϕ に対して成立する．任意の $\psi, \phi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ に対して，$\psi_n, \phi_n \in \mathcal{D}$ で $\psi_n \to \psi$, $\phi_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ となるものがとれる．前半の結果により，$\eta(t) := e^{-\int_0^t V_g(s)\,ds}$ とおけば

$$\left\langle \phi_n, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi_n \right\rangle = \langle J_0\phi_n, \eta(t)J_t\psi_n\rangle_{L^2(Q_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}})}$$

となる．$J_0, \eta(t)J_t$ は有界作用素であるから，$n \to \infty$ とすれば

$$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle = \langle J_0\phi, \eta(t)J_t\psi\rangle_{L^2(Q_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}})}.$$

これは (7.81) にほかならない．　■

【定理 7.20】 V は $\mathbb{R}^N$ 上で連続で下に有界でないとし，条件 (H.1), (H.2) が成立するとする．このとき，すべての $\psi, \phi \in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ に対して (7.81) が成り立つ．

証明　$\psi, \phi \geq 0$ の場合について示せば十分である．任意の $\lambda \in (0, \lambda_0)$ に対して $H_{\mathrm{F}}(\lambda) := U\overline{H(\lambda)}U^{-1}$ とおく．定理 7.19 により

$$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}(\lambda)}\psi \right\rangle = \int_{Q_{\mathrm{E}}} (J_0\phi)^*(J_t\psi)\, e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\,ds}.$$

左辺は，$\lambda \downarrow 0$ のとき，$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle$ に収束する．したがって

$$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{Q_{\mathrm{E}}} (J_0\phi)^*(J_t\psi)\, e^{-\int_0^t U(\lambda)_g(s)\,ds}.$$

定理 7.17 により，$J_0\phi \geq 0$, $J_t\psi \geq 0$ であるから，定理 7.16 の証明と同様に，単調収束定理により，右辺は (7.81) の右辺に等しいことがわかる．　■

【系 7.21】 定理 7.19 または定理 7.20 の仮定のもとで，すべての $t>0$ に対して，$e^{-tH_{\mathrm{F}}}$ は正値性改良作用素である．

証明 $\phi,\psi \geq 0$ ($\psi \neq 0, \phi \neq 0$) とする．このとき，定理 7.17 と (7.81) により，$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle \geq 0$．仮に，$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle = 0$ とすれば

$$\int_{Q_{\mathrm{E}}} (J_0\phi)(J_t\psi)\, e^{-\int_0^t V_g(s)\,ds}\, d\mu_{\mathrm{E}} = 0$$

であるが，被積分関数は非負であり，指数関数は μ_{E}-a.e. の点で正であるので

$$(J_0\phi)(J_t\psi) = 0, \quad \mu_{\mathrm{E}}\text{a.e.}$$

これを μ_{E} で積分し，FKN 公式を使えば，$\left\langle \phi, e^{-tH_{0,\mathrm{F}}}\psi \right\rangle = 0$．だが，定理 6.37 によって，$e^{-tH_{0,\mathrm{F}}}$ は正値性改良作用素であるから，これは矛盾である．したがって，$\left\langle \phi, e^{-tH_{\mathrm{F}}}\psi \right\rangle > 0$．ゆえに題意が成立する． ∎

7.8　基底状態の一意性

以上の準備のもとで，量子場の相互作用を含むハミルトニアン $\bar{H}$ の基底状態の一意性に関する定理を証明できる：

【定理 7.22】 定理 7.19 または定理 7.20 の仮定のもとで，$\bar{H}$ が基底状態をもつならば，それは定数倍を除いてただ 1 つである．さらに $\bar{H}$ の基底状態 ψ_0 で $U\psi_0 > 0$ となるものがとれる．

証明 $U\ker(\bar{H} - E_0(\bar{H})) = \ker(H_{\mathrm{F}} - E_0(H_{\mathrm{F}}))$ ($E_0(\bar{H}) = E_0(H_{\mathrm{F}})$ に注意)．したがって，$\bar{H}$ の基底状態が定数倍を除いて一意的であることと H_{F} の基底状態が定数倍を除いて一意的であることは同値である．系 7.21 と定理 4.38 によって，H_{F} の基底状態 ϕ_0 は定数倍を除いてただ 1 つであり，$\phi_0 > 0$ となるものがとれる．そこで，$\psi_0 = U^{-1}\phi_0$ とすれば，ψ_0 は $\bar{H}$ の基底状態である．明らかに，$U\psi_0 = \phi_0 > 0$． ∎

ノート

本章の方法は，量子場の統計力学 [9] にも拡張される．この場合，ボース場のハミルトニアンを H とし，任意の $\beta > 0$ に対して，$e^{-\beta H}$ がトレースクラス

であるとき

$$G_\beta(t_1,\cdots,t_n)$$
$$:= \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-t_1H}G_1^{(0)}\,e^{-(t_2-t_1)H}G_2^{(0)}\,e^{-(t_3-t_2)H}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H}G_n^{(0)}\,e^{-(\beta-t_n)H}\right)}{\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}}$$
$$(n\in\mathbb{N},\ 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n<\beta)$$

という形の量が重要な対象の1つとなる．この型の量を**正の逆温度 β におけるユークリッド的 n 点関数**という．まず，$H=H_\mathrm{b}$ の場合に，$G_\beta(t_1,\cdots,t_n)$ をあるガウス超過程に付随する確率測度を用いて汎関数積分の形に表示できることがわかる．次に，$H=H_\mathrm{b}+V$（V は Q 表示では掛け算作用素となる作用素）の場合，V に対する適切な条件のもとで，本章と同様の方法によって，$G_\beta(t_1,\cdots,t_n)$ に対する汎関数積分表示を導くことができる．詳しくは，[2, 4, 5, 14] を参照されたい．

関連図書

[1] A. Arai, On dimensional reduction of functional measures, *J. Functional Analysis*, **77** (1988), 372–402.

[2] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler–Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Functional Analysis*, **82** (1989), 330–369.

[3] A. Arai, A theorem on essential self-adjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory, *J. Mathematical Physics*, **32** (1991), 2082–2088.

[4] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index, *J. Functional Analysis*, **105** (1992), 342–408.

[5] A. Arai, Trace formulas, a Golden–Thompson inequality and classical limit in boson Fock space, *J. Functional Analysis*, **136** (1996), 510–546.

[6] 新井朝雄，『フォック空間と量子場 上下』，日本評論社，2000.

[7] 新井朝雄，『現代物理数学ハンドブック』，朝倉書店，2005.

[8] 新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[9] 新井朝雄，『量子統計力学の数理』，共立出版，2008.

[10] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I, II』，朝倉書店，1999.

[11] 江沢 洋・新井朝雄，『場の量子論と統計力学』，日本評論社，1988.

[12] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[13] 飛田武幸,『ブラウン運動』, 岩波書店, 1975.

[14] R. Høegh-Krohn, Relativistic quantum statistical mechanics in two-dimensional space-time, *Commun. Mathematical Physics*, **38** (1974), 195–224.

[15] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[16] B. Simon and R. Høegh-Krohn, Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled Bose fields, *J. Functional Analysis*, **9** (1972), 121–180.

第8章

量子輻射場

8.1 物理的背景

量子輻射場は，**光子** (photon) と呼ばれる量子——可視的な電磁波（光）を含む一般の電磁波の量子的構成要素——の生成・消滅を司る量子場であり，物理的に最も現実的で根源的な量子場の1つである．その名称が示唆するように，量子輻射場は，概念図式的には，古典電磁気学におけるベクトルポテンシャルの量子版である[1]．量子輻射場は，電子，陽子，荷電パイ中間子など電荷をもつ量子的粒子やその量子場——**荷電量子物質場**（たとえば，電子の量子場である量子電子場）——と相互作用を行い，多様な量子現象を現出させる．この範疇の現象を扱う物理学の理論は**量子電磁力学**または**量子電気力学** (quantum electrodynamics；QED と略) と呼ばれる．QED には，大きく分けて，相対論的なものと非相対論的なものがある[2]．非相対論的 QED の数学的に厳密な理論は，1990 年代の半ば以降，劇的に進展し，現在でも多くの研究がなされている．だが，4 次元ミンコフスキー時空上の非自明な相対論的 QED，すなわち，以下に述べる自由場の理論と同等でない相対論的 QED のモデルの存在は証明

[1] 古典電磁気学は，19 世紀後半，イギリスの偉大な物理学者マクスウェル（James Clerk Maxwell, 1831〜1879) によって，いくつかの基本原理に基づいて統一的に体系化された電磁気学をさす．だが，この理論は，原子レヴェル以下の微視的領域では破綻する．微視的領域における電磁現象の根源として措定される対象の 1 つが量子輻射場である．

[2] 理論がその構造に応じた形で，4 次元ミンコフスキー空間上のポアンカレ群に関する対称性を有するとき，当の理論は相対論的（特殊相対論的）であるという．物理学における対称性の諸相については，拙著，『物理の中の対称性——現代数理物理学の観点から』(日本評論社，2008) を参照されたい．

されておらず（2010 年 5 月現在），現代の量子数理物理学における最も困難で挑戦的な重要課題の 1 つであり続けている．

8.2　フォック空間による構成

量子輻射場に関わる量子系を記述するにあたってその基礎となるのは，相互作用をしない場合の量子輻射場──**自由な量子輻射場**（単に**自由場**ともいう）──である．そこで，まず，この量子場の構成について述べる．それは $L^2(\mathbb{R}_k^3)$ の直和ヒルベルト空間

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} := L^2(\mathbb{R}_k^3) \oplus L^2(\mathbb{R}_k^3) = \left\{ f = (f_1, f_2) \mid f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}_k^3) \right\} \tag{8.1}$$

を 1 粒子空間とするボソンフォック空間

$$\mathcal{F}_{\mathrm{rad}} := \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathcal{H}_{\mathrm{ph}} \tag{8.2}$$

を用いてなされる[3]．

電磁波は横波であるので，波の進行方向と垂直な平面内で振動を行う．したがって，電磁波が振動する独立な方向は 2 つあり，この 2 つの独立な自由度は電磁波の偏り (polarization) と呼ばれる．これは，量子論的には，各 $k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して，運動量 k の光子に，k と垂直な 2 つの線形独立なベクトル $e^{(1)}(k)$, $e^{(2)}(k)$ が付随しているという描像を示唆する．この場合，ベクトル $e^{(1)}(k)$, $e^{(2)}(k)$ が光子の偏りを記述すると考えるのである．光子の偏りの自由度が 2 であるという物理的事実と対応する数学的形式が光子の 1 粒子空間を $L^2(\mathbb{R}_k^3)$ の直和にとるということである．（以下，しばしば $\mathbb{R}_k^3$ を単に $\mathbb{R}^3$ と記す．）

$\left\{e^{(1)}(k), e^{(2)}(k)\right\}$ は k と垂直な平面の基底の 1 つをなす．必要ならばグラム–シュミットの直交化を行うことにより，$\left\{e^{(1)}(k), e^{(2)}(k)\right\}$ は正規直交基底であるとして一般性を失わない．対応：$k(\neq 0) \mapsto e^{(r)}(k)$ $(r = 1, 2)$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上のベクトル場（$\mathbb{R}^3$ 値写像）とみなされる．こうして，次の定義へと導かれる．

$r = 1, 2$ に対して，$e^{(r)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; k \mapsto e^{(r)}(k) = \left(e_1^{(r)}(k), e_2^{(r)}(k), e_3^{(r)}(k)\right)$ をボレル可測なベクトル場（i.e. 各成分関数 $e_j^{(r)}$, $j = 1, 2, 3$ がボレル可測）で

$$e^{(r)}(k) \cdot e^{(s)}(k) = \delta_{rs},$$

[3] 1 粒子空間を $L^2(\mathbb{R}_k^3)$ の直和にとる物理的な理由については次の段で述べる．

$$e^{(r)}(k)\cdot k=0,\quad r,s=1,2,$$
$$e^{(1)}(k)\times e^{(2)}(k)=\frac{k}{|k|},\quad k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$$

を満たすものとする．ただし，$x,y\in\mathbb{R}^3$ に対して，$x\times y$ は x と y のベクトル積（外積）を表す[4]．各 $k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ に対して $\{k/|k|,e^{(1)}(k),e^{(2)}(k)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなす（いわゆる動標構の1つ）．したがって

$$\sum_{r=1}^{2}e_j^{(r)}(k)\,e_\ell^{(r)}(k)=d_{j\ell}(k),\quad k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\},\ j,\ell=1,2,3 \tag{8.3}$$

が成立する．ただし

$$d_{j\ell}(k):=\delta_{j\ell}-\frac{k_jk_\ell}{|k|^2},\quad j,\ell=1,2,3,\ k\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}. \tag{8.4}$$

■**例 8.1** $\left(e^{(1)},e^{(2)}\right)$ の具体例の1つは次のように与えられる：

$$e^{(1)}(k)=\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2,-k_1,0),$$
$$e^{(2)}(k)=\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,|k|}(k_1k_3,k_2k_3,-(k_1^2+k_2^2)),\quad k\in\mathbb{R}^3,\ k_1^2+k_2^2\neq 0.$$

運動量が $k\in\mathbb{R}^3$ の光子のエネルギーは

$$\omega_{\mathrm{ph}}(k)=|k|,\quad k\in\mathbb{R}^3 \tag{8.5}$$

によって与えられる．対応 $\omega_{\mathrm{ph}}:k\mapsto\omega_{\mathrm{ph}}(k)$ を**1光子エネルギー関数**と呼ぶ．したがって，自由な量子輻射場のハミルトニアンは，$\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ 上の非負自己共役作用素 $\omega_{\mathrm{ph}}\oplus\omega_{\mathrm{ph}}$ の第2量子化

$$H_{\mathrm{rad}}:=d\Gamma(\omega_{\mathrm{ph}}\oplus\omega_{\mathrm{ph}}) \tag{8.6}$$

によって定義される．

✱**注意 8.2** 任意の $f=(f_1,f_2)\in D(\omega_{\mathrm{ph}}\oplus\omega_{\mathrm{ph}})=D(\omega_{\mathrm{ph}})\oplus D(\omega_{\mathrm{ph}})$ に対して，$(\omega_{\mathrm{ph}}\oplus\omega_{\mathrm{ph}}f)(k)=(\omega_{\mathrm{ph}}(k)f_1(k),\omega_{\mathrm{ph}}(k)f_2(k))=\omega_{\mathrm{ph}}(k)f(k)$, a.e.$k\in\mathbb{R}^3$ であるか

---

[4] $x\times y=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$.

ら，$\omega_{\rm ph} \oplus \omega_{\rm ph}$ は，関数 $\omega_{\rm ph}$ による，$\mathcal{H}_{\rm ph}$ 上の掛け算作用素と同一視できる[5]．この理由により，数理物理学の文献では，$H_{\rm rad}$ を単に $d\Gamma(\omega_{\rm ph})$ と記す場合が多い．

次に量子輻射場を定義するために，1 光子エネルギー関数に付随するソボレフ型の空間を導入する．

$\mathcal{S}'_{\rm real}(\mathbb{R}^3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の実緩増加超函数の全体とし

$$\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) := \{f \in \mathcal{S}'_{\rm real}(\mathbb{R}^3) | \hat{f}/\sqrt{\omega_{\rm ph}} \in L^2(\mathbb{R}^3_k)\} \tag{8.7}$$

とおく．ただし，$\hat{f}$ は超関数の意味での（i.e. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上の）フーリエ変換である．この集合は実ベクトル空間であり

$$\langle f, g\rangle_{-1/2} := \left\langle \frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}, \frac{\hat{g}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad f, g \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.8}$$

を内積とする実ヒルベルト空間である．

各 $f \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ と $j = 1, 2, 3$ に対して

$$F_j(f) := \left(\frac{\hat{f} e_j^{(1)}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}, \frac{\hat{f} e_j^{(2)}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}} \right) \in \mathcal{H}_{\rm ph}, \tag{8.9}$$

を導入し

$$A_j(f) := \Phi_{\rm S}(F_j(f)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{[a(F_j(f))^* + a(F_j(f))]} \tag{8.10}$$

を定義する．ただし，$a(\cdot)$, $\Phi_{\rm S}(\cdot)$ はそれぞれ，$\mathcal{F}_{\rm rad}$ 上の消滅作用素，シーガル場である．自己共役作用素 $A_j(f)$ の $H_{\rm rad}$ に関するハイゼンベルク作用素

$$A_j(t, f) := e^{itH_{\rm rad}} A_j(f)\, e^{-itH_{\rm rad}}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{8.11}$$

を考える．(6.123) によって

$$A_j(t, f) = \Phi_{\rm S}(e^{it\omega_{\rm ph}} F_j(f)) \tag{8.12}$$

---

[5] $\mathbb{R}^3_k$ 上のボレル可測関数 F による，$\mathcal{H}_{\rm ph}$ 上の掛け算作用素 M_F は次のように定義される：

$$D(M_F) := \{f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_{\rm ph} | F f_1, F f_2 \in L^2(\mathbb{R}^3_k)\}, \quad M_F f := (F f_1, F f_2), \quad f \in D(M_F).$$

以下，誤解の恐れがないかぎり，M_F を単に F と記す．

が成り立つ[6]．ところで，フーリエ解析により

$$\mathcal{F}_3^{-1}\omega_{\rm ph}\mathcal{F}_3 = \sqrt{-\Delta} \tag{8.13}$$

であるから（$\mathcal{F}_3$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフーリエ変換）

$$\mathcal{F}_3(e^{it\sqrt{-\Delta}}f) = e^{it\omega_{\rm ph}}\hat{f}.$$

したがって

$$A_j(t,f) = A_j(e^{it\sqrt{-\Delta}}f) \tag{8.14}$$

という陽な表示が得られる．ただし，$[0,\infty)$ 上の任意の有界な実数値ボレル可測関数 v に対して，$\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ 上の作用素 $v(\sqrt{-\Delta})$ を $(v(\sqrt{-\Delta})f)\hat{}(k) := v(|k|)\hat{f}(k)$, a.e.$k$, $f \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ によって定義する．

フォック空間 $\mathcal{F}_{\rm rad}$ における個数作用素を $N_{\rm rad}$ と記す：

$$N_{\rm rad} := d\Gamma(I \oplus I). \tag{8.15}$$

【定理 8.3】 $f \in \mathcal{S}_{\rm real}(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in D(N_{\rm rad}^{1/2})$ とする．このとき，各 $j=1,2,3$ に対して，$A_j(t,f)\psi$ は t について無限回強微分可能であり

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_j(t,f)\psi + A_j(t,-\Delta f)\psi = 0, \quad j=1,2,3 \tag{8.16}$$

が成立する．さらに

$$\sum_{j=1}^{3} A_j(t,D_jf)\psi = 0 \tag{8.17}$$

が成り立つ．

証明 (8.10) によって

$$\|A_j(f)\psi\| \le \sqrt{2}\|F_j(f)\|\|(N_{\rm rad}+1)^{1/2}\psi\|.$$

一方，(8.3) を用いると

$$\|F_j(f)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\hat{f}(k)|^2}{\omega_{\rm ph}(k)}\left(1-\frac{k_j^2}{|k|^2}\right) \le \left\|\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right\|^2.$$

---

[6] 注意 8.2 によって，$e^{it\omega_{\rm ph}}f = (e^{it\omega_{\rm ph}}f_1, e^{it\omega_{\rm ph}}f_2) = e^{it\omega_{\rm ph}} \oplus e^{it\omega_{\rm ph}}f$, $f=(f_1,f_2) \in \mathcal{H}_{\rm ph}$ である．

したがって

$$\|A_j(f)\psi\| \le \sqrt{2}\left\|\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right\| \|(N_{\rm rad}+1)^{1/2}\psi\| \tag{8.18}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\hat{f}/\sqrt{\omega_{\rm ph}} \in D(\omega_{\rm ph}^n)$ であることは容易にわかる（$\because$ $\int_{\mathbb{R}^3}|k|^{2n-1}\left|\hat{f}(k)\right|^2 dk < \infty$）．以上の事実と (8.12) を用いて，定理 6.8 の証明と同様の方法により，定理の前半の主張が証明される．

(8.17) は

$$F_j\big(e^{it\sqrt{-\Delta}}D_j f\big) = e^{it\omega_{\rm ph}(k)}\left(i\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}k_j\, e_j^{(1)}, i\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}k_j\, e_j^{(2)}\right)$$

および k と $e^{(r)}$ の直交性から導かれる．∎

方程式 (8.16) は，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 上の関数 $A_j^{\rm cl}(t,x)$ $(j=1,2,3)$ に関する古典的な波動方程式

$$\frac{\partial^2 A_j^{\rm cl}(t,x)}{\partial t^2} - \Delta A_j^{\rm cl}(t,x) = 0 \tag{8.19}$$

の量子版の 1 つを与える．(8.17) は，**クーロンゲージ条件**

$$\sum_{j=1}^{3} D_j A_j^{\rm cl}(t,x) = 0 \tag{8.20}$$

を量子場の文脈で捉えた形の 1 つである．古典的な電磁場を与えるベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}^{\rm cl}(t,x) = (A_1^{\rm cl}(t,x), A_2^{\rm cl}(t,x), A_3^{\rm cl}(t,x))$ とすれば，これは，クーロンゲージ条件 (8.20) のもとで，(8.19) を満たす[7]．

以上の事実を考慮して，作用素の組

$$\mathbf{A}(t,f) := (A_1(t,f), A_2(t,f), A_3(t,f)), \quad f \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.21}$$

を時刻 t の**自由な量子輻射場**と呼ぶ．したがって

$$\mathbf{A}(f) := (A_1(f), A_2(f), A_3(f)) \tag{8.22}$$

は時刻 0 の自由な量子輻射場である．前段で述べたことから明らかなように，$A(t,f)$ は，古典電磁気学における自由な電磁場のベクトルポテンシャルの（クーロンゲージにおける）量子版と解釈される．

---

[7] 詳しくは，電磁気学の本または拙著，『物理現象の数学的諸原理』(共立出版，2003) を参照．

$\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}$ におけるフォック真空を Ω としよう．定理 6.18 の単純な応用と (8.3) により

$$\langle \Omega, A_j(f)A_\ell(g)\Omega\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(k)^*\hat{g}(k)}{\omega_{\mathrm{ph}}(k)}\, d_{j\ell}(k)\, dk \tag{8.23}$$

となることがわかる．

8.3 Q 表示

式 (8.23) は，量子輻射場 $\mathbf{A}(f)$ のかわりに，むしろ

$$\widetilde{A}(\mathbf{f}) := \sum_{j=1}^{3} A_j(f_j), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.24}$$

という形の作用素を考えた方が自然であることを示唆する．実際

$$\left\langle \Omega, \widetilde{A}(\mathbf{f})\widetilde{A}(\mathbf{g})\Omega \right\rangle = \frac{1}{2} q_d(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.25}$$

と書ける．ただし

$$q_d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\omega_{\mathrm{ph}}(k)} \sum_{j,\ell=1}^{3} \hat{f}_j(k)^* d_{j\ell}(k)\hat{g}_\ell(k)\, dk. \tag{8.26}$$

容易にわかるように，対応 $q_d : (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mapsto q_d(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ は，直積空間 $(\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)) \times (\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ 上の実双線形形式である．また，(8.25) または (8.26) による直接計算により，q_d は非負，すなわち

$$q_d(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{f} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.27}$$

が成り立つこともわかる．だが，$q_d(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0$ であっても，$\mathbf{f} = 0$ とは限らない．実際

$$\mathcal{N}_d := \{\mathbf{f} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \mid q_d(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0\} \tag{8.28}$$

とおけば

$$\mathcal{N}_d = \left\{ \mathbf{f} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \;\middle|\; u \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \text{ が存在して } \hat{f}_j(k) = i\frac{k_j}{|k|} u(k),\ \text{a.e.}k,\ j = 1, 2, 3 \right\} \tag{8.29}$$

が成立する[8]．したがって，q_d は $\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ 上の半正定値内積である．

半正定値内積空間の一般論にしたがって，商空間 $(\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3))/\mathcal{N}_d$ を考えると，これは，q_d から決まる自然な内積によって実内積空間になる．そこで，その完備化を

$$\mathcal{K}_{-1/2} := \overline{(\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3))/\mathcal{N}_d} \tag{8.30}$$

とすれば，これは実ヒルベルト空間である．構成の仕方により，$\mathcal{K}_{-1/2}$ の内積は

$$\langle [\mathbf{f}], [\mathbf{g}] \rangle_{\mathcal{K}_{-1/2}} = q_d(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.31}$$

を満たす．ただし，$[\mathbf{f}] \in (\oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3))/\mathcal{N}_d$ は $\mathbf{f}$ の同値類を表す．以後，混乱の恐れのないかぎり，$[\mathbf{f}]$ も単に $\mathbf{f}$ で表す．

さて，$\mathcal{K}_{-1/2}$ を添え字集合とするガウス超過程を $\{\mathcal{A}^0(\mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathcal{K}_{-1/2}\}$ とし，これが定義されている確率空間を $(Q_{\mathrm{ph}}, \Sigma_{\mathrm{ph}}, \mu_{\mathrm{ph}})$ とする．したがって

$$\left\langle e^{i\mathcal{A}^0(\mathbf{f})} \right\rangle = e^{-\|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{K}_{-1/2}}/4}, \tag{8.32}$$

$$\left\langle \mathcal{A}^0(\mathbf{f}) \mathcal{A}^0(\mathbf{g}) \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathcal{K}_{-1/2}}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}_{-1/2} \tag{8.33}$$

が成り立つ．

各 $f \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\mathcal{A}^0_1(f) := \mathcal{A}^0(f, 0, 0), \quad \mathcal{A}^0_2(f) := \mathcal{A}^0(0, f, 0), \quad \mathcal{A}^0_3(f) := \mathcal{A}^0(0, 0, f) \tag{8.34}$$

とおけば，容易にわかるように

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{A}^0_j(f_j), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3), \ \mu_{\mathrm{ph}}\text{-a.e.} \tag{8.35}$$

が成立する．さらに，$j, \ell = 1, 2, 3$ に対して

$$\left\langle \mathcal{A}^0_j(f) \mathcal{A}^0_\ell(g) \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(k)^* \hat{g}(k)}{\omega_{\mathrm{ph}}(k)} d_{j\ell}(k), \quad f, g \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3). \tag{8.36}$$

---

[8] $q_d(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0 \Longleftrightarrow \left| \left\langle \frac{k}{|k|}, \hat{\mathbf{f}}(k) \right\rangle_{\mathbb{C}^3} \right|^2 = |\hat{\mathbf{f}}(k)|^2_{\mathbb{C}^3}$ (a.e.k)．後者は $\mathbb{C}^3$ における内積に関するシュヴァルツの不等式で等号が成立している場合である．したがって，ある $u(k)$ があって，$\hat{\mathbf{f}}(k) = iu(k)k/|k|$ と書ける．この場合，$|\hat{\mathbf{f}}(k)| = |u(k)|$ であるから，$u \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ でなければならない．

が成り立つ．したがって

$$\left\langle \mathcal{A}_j^0(f)\mathcal{A}_\ell^0(g)\right\rangle = \langle \Omega, A_j(f)A_\ell(g)\Omega\rangle, \quad f,g\in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3),\ j,\ell=1,2,3. \tag{8.37}$$

こうして，確率超過程 $\mathcal{A}_j^0(f)$, $f\in\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ が量子輻射場 $A_j(f)$ の Q 表示であることが示唆される．実際，次の定理が成り立つ：

【定理 8.4】 ユニタリ変換 $U:\mathcal{F}_{\rm rad}\to L^2(Q_{\rm ph}, d\mu_{\rm ph})$ で次の性質を満たすものがただ 1 つ存在する：

(i) $$U\Omega = 1.$$

(ii) $$UA_j(f)U^{-1} = \mathcal{A}_j^0(f),\ f\in\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3),\ j=1,2,3.$$

証明 写像 $T:\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)\to\mathcal{H}_{\rm ph}$ を

$$T(\mathbf{f}) := \sum_{j=1}^3 F_j(f_j), \quad \mathbf{f}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$$

によって定義する．このとき

$$\overline{\widetilde{A}(\mathbf{f})} = \Phi_{\rm S}(T\mathbf{f}) \tag{8.38}$$

が成り立つ[9]．T は線形であり

$$\|T\mathbf{f}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{K}_{-1/2}} \tag{8.39}$$

であることは容易に確かめられる．さらに, T の値域 $\mathrm{Ran}\,(T)$ は $\mathcal{H}_{\rm ph}$ で稠密であることもわかる[10]．等式 (8.39) は，$\mathbf{f}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ と $\mathbf{g}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ が同値ならば, $T\mathbf{f}=T\mathbf{g}$ であることも意味する．したがって, T は $(\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{N}_d$ から $\mathcal{H}_{\rm ph}$ への等距離写像へと拡大される．この拡大を $\hat{T}$ と記す：

$$\hat{T}[\mathbf{f}] := T\mathbf{f}, \quad [\mathbf{f}]\in(\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{N}_d.$$

---

[9] まず，$\widetilde{A}(\mathbf{f})\supset\Phi_{\rm S,0}(T\mathbf{f})$ がわかる．$\Phi_{\rm S,0}(T\mathbf{f})$ は本質的に自己共役であるので，両辺の閉包をとれば，求める式が出る．

[10] $g=(g_1,g_2)\in\mathcal{H}_{\rm ph}$ が $\langle T(\mathbf{f}), g\rangle = 0$, $\forall\mathbf{f}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ を満たすならば，$g=0$ を示せばよい．実際，任意の $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して，$\hat{\mathbf{f}}(k)=u(k)\,e^{(r)}(k)$ ととれば，$\int_{\mathbb{R}^3} u(k)^* g_r(k)|k|^{-1/2}\,dk = 0$ であるので，$g_r=0$ が結論される．

すると，拡大定理により，$\hat{T}$ は $\mathcal{K}_{-1/2}$ から $\mathcal{H}_{\rm ph}$ へのユニタリ変換に一意的に拡大される．この拡大も同じ記号 $\hat{T}$ と記す．ゆえに，一般論（定理 6.34 と 6.12 を参照）の応用により，$U := \Gamma(\hat{T}^{-1})$（$\hat{T}^{-1}$ の第二種の第 2 量子化）は $\mathcal{F}_{\rm rad}$ から $L^2(Q_{\rm ph}, d\mu_{\rm ph})$ へのユニタリ変換であり

$$U\Omega = 1, \quad U\Phi_{\rm S}(f)U^{-1} = \mathcal{A}^0(\hat{T}^{-1}f), \quad f \in \mathcal{H}_{\rm ph}$$

を満たす．これと (8.38) により，題意が成立する．∎

8.4　ユークリッド的自由輻射場と汎関数積分表示

抽象的なボース場の場合と同様に，自由な量子輻射場のユークリッド版を考えることができる．そのためには，次の事実に注意すればよい：

【補題 8.5】　任意の $t, s \in \mathbb{R}$, $t > s$ と $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\left\langle \Omega, \tilde{A}(\mathbf{f}) e^{-(t-s)H_{\rm rad}} \tilde{A}(\mathbf{g})\Omega \right\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(t-s)\omega_{\rm ph}(k)} \frac{\hat{f}_j(k)^* \hat{g}_\ell(k)}{\omega_{\rm ph}(k)}\, d_{j\ell}(k)\, dk. \tag{8.40}$$

証明　補題 7.5 によって

$$e^{-(t-s)H_{\rm rad}}\tilde{A}(\mathbf{g})\Omega = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell\left(e^{-(t-s)\sqrt{-\Delta}} g_\ell\right)\Omega.$$

したがって，求める結果を得る．∎

公式 (7.36) を $\lambda = \omega_{\rm ph}$ の場合に応用すれば，(8.40) の右辺は次のように書きかえられる：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|t-s|\omega_{\rm ph}(k)} \frac{\hat{f}_j(k)^* \hat{g}_\ell(k)}{\omega_{\rm ph}(k)}\, d_{j\ell}(k)\, dk \\
&= \sum_{j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\delta_t \times f_j}(k_0, k)^*}{\sqrt{k_0^2 + k^2}} \frac{\widehat{\delta_s \times g_\ell}(k_0, k)}{\sqrt{k_0^2 + k^2}}\, d_{j\ell}(k)\, dk\, dk_0
\end{aligned} \tag{8.41}$$

そこで，$\mathbb{R}^4$ 上の実緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'_{\rm real}(\mathbb{R}^4)$ の 3 個の直和 $\oplus^3 \mathcal{S}'_{\rm real}(\mathbb{R}^4)$ の

元 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ で

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\left|\hat{F}_j(k_0,k)\right|^2}{k_0^2+k^2}\,dk\,dk_0 < \infty, \quad j=1,2,3$$

を満たすものの全体を $\mathcal{S}^3_{-1}(\mathbb{R}^4)$ とする．これは

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle_{-1} := 2\sum_{j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^4}\frac{\hat{F}_j(k_0,k)^*\hat{G}_\ell(k_0,k)}{k_0^2+k^2}\,d_{j\ell}(k)\,dk\,dk_0, \qquad \mathbf{F},\mathbf{G}\in\mathcal{S}^3_{-1}(\mathbb{R}^4),\ j,\ell=1,2,3 \tag{8.42}$$

を半正定値内積とする実半正定値内積空間である．以上から

$$\left\langle \Omega, \tilde{A}(\mathbf{f})e^{-|t-s|H_{\mathrm{rad}}}\tilde{A}(\mathbf{g})\Omega\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \delta_t\times\mathbf{f}, \delta_s\times\mathbf{g}\right\rangle_{-1}, \quad s,t\in\mathbb{R} \tag{8.43}$$

が成立することがわかる．ただし，$\delta_t\times\mathbf{f} := (\delta_t\times f_1, \delta_t\times f_2, \delta_t\times f_3)$ である．前節の場合と同様に

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{F}\in\mathcal{S}^3_{-1}(\mathbb{R}^4) \mid \langle\mathbf{F},\mathbf{F}\rangle_{-1} = 0\} \tag{8.44}$$

とし，これから定まる商空間 $\mathcal{S}^3_{-1}(\mathbb{R}^4)/\mathcal{M}$ の自然な内積に関する完備化を $\mathcal{K}_{-1}$ とする（混乱の恐れのないかぎり，$\mathbf{F}$ の同値類 $[\mathbf{F}]$ も単に $\mathbf{F}$ と記す）．$\mathcal{K}_{-1}$ を添え字集合とするガウス超過程を $\{\mathcal{A}(\mathbf{F}) \mid \mathbf{F}\in\mathcal{K}_{-1}\}$ とし，それが定義されている確率空間を $(Q_{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}})$ とする．したがって

$$\left\langle e^{i\mathcal{A}(\mathbf{F})}\right\rangle = e^{-\|\mathbf{F}\|_{-1}^2/4}, \tag{8.45}$$

$$\langle \mathcal{A}(\mathbf{F})\mathcal{A}(\mathbf{G})\rangle = \frac{1}{2}\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{-1}, \quad \mathbf{F},\mathbf{G}\in\mathcal{S}^3_{-1}(\mathbb{R}^4). \tag{8.46}$$

これと (8.43) によって

$$\left\langle \Omega, \tilde{A}(\mathbf{f})e^{-|t-s|H_{\mathrm{rad}}}\tilde{A}(\mathbf{g})\Omega\right\rangle = \langle \mathcal{A}(\delta_t\times\mathbf{f})\mathcal{A}(\delta_s\times\mathbf{g})\rangle, \qquad \mathbf{f},\mathbf{g}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3),\ t,s\in\mathbb{R} \tag{8.47}$$

が得られる．そこで

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}(t,\mathbf{f}) := \mathcal{A}(\delta_t\times\mathbf{f}), \quad t\in\mathbb{R},\ \mathbf{f}\in\oplus^3\mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3) \tag{8.48}$$

を導入し，これを時刻 t での**ユークリッド的自由輻射場**と呼ぶ．

(8.47) の左辺および量子場 $\widetilde{A}(\mathbf{f})$ の n 点シュヴィンガー関数 $(n \geq 3)$ を Q 表示で表すために $L^2(Q_{\mathrm{ph}}, d\mu_{\mathrm{ph}})$ 上での自由ハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{rad}}$ とする：

$$\hat{H}_{\mathrm{rad}} := UH_{\mathrm{rad}}U^{-1}. \tag{8.49}$$

ただし，U は定理 8.4 のユニタリ変換である．

次の定理は，量子場 $\widetilde{A}(\mathbf{f})$ の n 点シュヴィンガー関数 $(n \in \mathbb{N})$ がユークリッド的自由輻射場の期待値として表れることを示す：

【定理 8.6】（自由な量子輻射場に対する FKN 公式）　$n \in \mathbb{N}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $\mathbf{f}_j \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\Big\langle 1, \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_1)\, e^{-(t_2-t_1)\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_2)\, e^{-(t_3-t_2)\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \\ &\qquad \times \cdots \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_n) 1 \Big\rangle_{L^2(Q_{\mathrm{ph}}, d\mu_{\mathrm{ph}})} \\ &= \langle \mathcal{A}_{\mathrm{E}}(t_1, \mathbf{f}_1) \cdots \mathcal{A}_{\mathrm{E}}(t_n, \mathbf{f}_n) \rangle .\end{aligned} \tag{8.50}$$

証明　(7.48) の証明とまったく同様にして

$$\begin{aligned}&\langle \Omega, \tilde{A}(\mathbf{f}_1)\, e^{-(t_2-t_1)H_{\mathrm{rad}}} \tilde{A}(\mathbf{f}_2)\, e^{-(t_3-t_2)H_{\mathrm{rad}}} \\ &\qquad \times \cdots \tilde{A}(\mathbf{f}_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})H_{\mathrm{rad}}} \tilde{A}(\mathbf{f}_n)\Omega \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}_{\mathrm{E}}(t_1, \mathbf{f}_1) \cdots \mathcal{A}_{\mathrm{E}}(t_n, \mathbf{f}_n) \rangle .\end{aligned} \tag{8.51}$$

が示される．一方，定理 8.4 によって，左辺は

$$\begin{aligned}&\Big\langle 1, \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_1)\, e^{-(t_2-t_1)\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_2)\, e^{-(t_3-t_2)\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \\ &\qquad \times \cdots \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_{n-1})\, e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}_{\mathrm{rad}}} \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_n) 1 \Big\rangle_{L^2(Q_{\mathrm{ph}}, d\mu_{\mathrm{ph}})}\end{aligned}$$

に等しい．ゆえに (8.50) が成立する．　■

定理 8.6 から，(8.50) を包括する一般的な汎関数積分表示が導けることは抽象的自由ボース場の場合と同断である．だが，それはほとんどルーティンワークに近いのでそれを述べることは省略する（読者は自ら展開されたい）．

関連図書

[1] 新井朝雄，『フォック空間と量子場 上下』，日本評論社，2000.

[2] C. Fefferman, J. Fröhlich and G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, *Communications in Mathematical Physics*, **190** (1997), 309–330.

[3] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Reviews in Mathematical Physics*, **9** (1997), 489–530.

[4] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, *Topics in the Theory of Schrödinger operators* (Editors: H. Araki and H. Ezawa, World Scientific, 2004), 145–272.

[5] 廣島文生，非相対論的量子電気力学，『現代物理学の歴史 II——物性・生物・数理物理』(朝倉書店，2004)，570–590.

[6] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.

第 9 章

量子的粒子とボース場の相互作用モデル

9.1 モデルの定義

d を任意の自然数として，d 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}_x^d$ において，1 個の非相対論的な量子的粒子がボース場と相互作用を行う系を考える．ボース場との相互作用を考慮しない場合の量子的粒子のハミルトニアンは，第 4 章の場合と同じく，$\bar{H}_V$—(4.1) を参照—で与えられるとし，次を仮定する：

【仮定 9.1】 H_V は本質的に自己共役であり，下に有界である．

ボース場については，一般性をもたせるために，任意の可分な実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から定まるボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ で作用するものを考える．このとき，量子的粒子とボース場の相互作用系の状態のヒルベルト空間として

$$\mathcal{F} := L^2(\mathbb{R}_x^d) \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \tag{9.1}$$

をとることができる．

相互作用がない場合の系のハミルトニアンは

$$K := \bar{H}_V \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{b}} \tag{9.2}$$

によって定義される．ただし，H_{b} は自由ボース場のハミルトニアンである ((7.1) を参照)．テンソル積の一般論により，K は自己共役であり，下に有界である．

ヒルベルト空間 $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^d_x$ 上の $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 値 2 乗可積分関数のなすヒルベルト空間

$$
\begin{aligned}
&L^2(\mathbb{R}^d_x;\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})) \\
&\quad = \left\{ \Psi : \mathbb{R}^d_x \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d_x} \|\Psi(x)\|^2_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}\, dx < \infty \right\}
\end{aligned} \tag{9.3}
$$

と自然な仕方で同型である．すなわち，ユニタリ変換 $U_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to L^2(\mathbb{R}^d_x;\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ で

$$
U_{\mathcal{F}}(f \otimes \psi) = f \times \psi, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_x),\ \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})
$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．ただし

$$
(f \times \psi)(x) := f(x)\psi \tag{9.4}
$$

である[1]．この同型の意味で

$$
\mathcal{F} \cong L^2(\mathbb{R}^d_x;\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})) \tag{9.5}
$$

と記す．

量子的粒子とボース場の相互作用を定義するために，写像 $g : \mathbb{R}^d_x \to \mathcal{H}_{-1} \cap \mathcal{H}_{-1/2}; \mathbb{R}^d \ni x \mapsto g(x) \in \mathcal{H}_{-1} \cap \mathcal{H}_{-1/2}$ で次の性質をもつものを任意に 1 つ固定する：

(g.1) g は $\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ の位相で強連続である．

(g.2)
$$
\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|g(x)\|_{-1} < \infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|g(x)\|_{-1/2} < \infty.
$$

$\phi_0(f)$ ($f \in \mathcal{H}_{-1/2}$) を時刻 0 の量子場とし，N_{b} を個数作用素とする．

【補題 9.1】　各 $\psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，写像 : $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \phi_0(g(x))\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ は強連続である．

証明　定理 6.9-(vi) によって

$$
\|\phi_0(g(x))\psi\| \le \sqrt{2}\|g(x)\|_{-1/2}\left\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\psi\right\|, \quad \forall \psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \tag{9.6}
$$

[1] ヒルベルト空間値の L^2 関数からなるヒルベルト空間の理論については，新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I, II』(朝倉書店，1999) のを 4.1 節を参照．

が成り立つ．したがって，任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\|\phi_0(g(x))\psi - \phi_0(g(y))\psi\| \leq \sqrt{2}\|g(x) - g(y)\|_{-1/2}\left\|(N_{\mathrm{b}} + 1)^{1/2}\psi\right\|, \quad \forall\psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}). \tag{9.7}$$

条件 (g.1) により，右辺は，$y \to x$ のとき 0 に収束する．したがって，題意が成立する． ∎

【補題 9.2】 $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ は, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $\Psi(x) \in D(\phi_0(g(x))$ を満たすとする．このとき，写像：$x \mapsto \phi_0(g(x))\Psi(x)$ はボレル可測である．

証明 $\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ で稠密であるので，各 $\eta \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ に対して，$\langle \eta, \phi_0(g(x))\Psi(x)\rangle$ がボレル可測であることを示せば十分である．$\phi_0(g(x))$ の対称性は $\langle \eta, \phi_0(g(x))\Psi(x)\rangle = \langle \phi_0(g(x))\eta, \Psi(x)\rangle$ を意味する．したがって，$\phi_0(g(x))\eta$ がボレル可測であることを示せばよい．補題 9.1 によって，任意の $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ に対して，$\langle \psi, \phi_0(g(x))\eta\rangle$ は x について連続である．したがって，それはボレル可測である． ∎

補題 9.2 によって，$L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 上の作用素 $\widetilde{H}_I(g)$ を次のように定義することが可能である：

$$D\big(\widetilde{H}_I(g)\big) := \left\{\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})) \,\middle|\, \Psi(x) \in D(\phi_0(g(x)), \text{a.e.}x, \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi_0(g(x))\Psi(x)\|^2_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} dx < \infty\right\}, \tag{9.8}$$

$$\big(\widetilde{H}_I(g)\Psi\big)(x) := \phi_0(g(x))\Psi(x), \quad \Psi \in D(\widetilde{H}_I(g)), \text{ a.e.}x. \tag{9.9}$$

この作用素の基本的性質を調べよう．

【命題 9.3】 $L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ の部分空間

$$\widetilde{\mathcal{D}}_0 := \mathcal{L}(\{f \times \psi | f \in L^2(\mathbb{R}^d), \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})\}) \tag{9.10}$$

は稠密であり

$$\widetilde{\mathcal{D}}_0 \subset D\big(\widetilde{H}_I(g)\big) \tag{9.11}$$

が成り立つ．さらに，$\tilde{H}_I(g)$ は対称作用素である．

証明　$\Psi = f \times \psi \in \widetilde{\mathcal{D}}_0$ とすれば $\psi \in D(\phi_0(g(x)))$ であるから，$\Psi(x) = f(x)\psi \in D(\phi_0(g(x)))$ であり，$\phi_0(g(x))\Psi(x) = f(x)\phi_0(g(x))\psi$ である．したがって

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\phi_0(g(x))\Psi(x)\|^2_{\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \|\phi_0(g(x))\psi\|^2\, dx.$$

(9.6) によって

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \|\phi_0(g(x))\psi\|^2\, dx \\ &\quad \le 2\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \|g(x)\|^2_{-1/2}\, dx\right) \left\|(N_{\rm b}+1)^{1/2}\psi\right\|^2. \end{aligned}$$

(g.2) により，$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\|g(x)\|^2_{-1/2}\, dx < \infty$．ゆえに $\Psi \in D\big(\widetilde{H}_I(g)\big)$．よって，$\widetilde{\mathcal{D}}_0 \subset D\big(\widetilde{H}_I(g)\big)$．$\widetilde{\mathcal{D}}_0$ は稠密であるから，$D(\widetilde{H}_I(g))$ は稠密である．任意の $\Psi \in D\big(\widetilde{H}_I(g)\big)$ に対して

$$\left\langle \Psi, \widetilde{H}_I(g)\Psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \Psi(x), \phi_0(g(x))\Psi(x)\rangle_{\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}\, dx.$$

$\phi_0(g(x))$ の対称性によって，$\langle \Psi(x), \phi_0(g(x))\Psi(x)\rangle_{\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} \in \mathbb{R}$．したがって，$\left\langle \Psi, \widetilde{H}_I(g)\Psi \right\rangle \in \mathbb{R}$．ゆえに $H_I(g)$ は対称作用素である．■

ユニタリ変換 $U_{\mathcal{F}}$ を用いて，$\mathcal{F}$ 上の作用素 $H_I(g)$ を

$$H_I(g) := U_{\mathcal{F}}^{-1}\widetilde{H}_I(g)U_{\mathcal{F}} \tag{9.12}$$

によって定義する．もちろん，これも対称作用素である．物理的には，この作用素は，量子的粒子とボース場の相互作用の 1 つの型を定義するものである．この相互作用をもつ全系のハミルトニアンは

$$H_{\rm N} := K + H_I(g) \tag{9.13}$$

によって定義される．この型の作用素をハミルトニアンとする量子的粒子とボース場の相互作用モデルををネルソン型モデルと呼ぶ．

■**例 9.4**　例 7.4 の量子場を運動量表示で考える ($\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}^d_k)$ の場合)．ただし，$d \ge 3$ とする (1 ボソンの質量 m が正の場合には，この制限は要らない)．$\kappa > 0$ として，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$g_\kappa(x) \in D\big(\omega^{-1/2}\big)$ を

$$(g_\kappa(x))(k) = \frac{e^{-ikx}\chi_{[0,\kappa]}(|k|)}{(2\pi)^{d/2}} \tag{9.14}$$

を満たすものとして定義する．ただし，$\chi_{[0,\kappa]}$ は閉区間 $[0,\kappa]$ の定義関数である．パラメータ $\kappa>0$ は**運動量の紫外切断** (ultraviolet cutoff) と呼ばれる．$d=3$, $g=g_\kappa$ の場合がもともとのネルソン型モデルである[2]．

ネルソン型モデルのハミルトニアンの一般化の 1 つとして，$\lambda\ge 0$ をパラメータとする作用素

$$H_{\mathrm{N}}(\lambda):=K+H_I(g)+\lambda H_I(g)^2=H_{\mathrm{N}}+\lambda H_I(g)^2 \tag{9.15}$$

が考えられる．明らかに，$H_{\mathrm{N}}(0)=H_{\mathrm{N}}$ である．そこで，作用素 $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ をハミルトニアンとするモデルを**一般化されたネルソン型モデル**と呼ぶ[3]．

一般化されたネルソン型モデルの解析にあたっても，まず，そのハミルトニアン $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ の（本質的）自己共役性を証明しなければならない．

9.2 H_{N} と $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ の自己共役性

【補題 9.5】 A を稠密に定義された任意の線形作用素とし，$\varepsilon>0$ を任意にとる．このとき，すべての $\psi\in D(A^*A)$ に対して

$$\|A\psi\|^2\le\varepsilon\|A^*A\psi\|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\psi\|^2 \tag{9.16}$$

が成り立つ．

証明 シュヴァルツの不等式により，$\|A\psi\|^2\le\|\psi\|\|A^*A\psi\|$．そこで，初等的な不等式 (6.152)) を $a=\|A^*A\psi\|$, $b=\|\psi\|^2$ として適用すれば求める不等式が得られる． ∎

補題 6.26 によって，任意の $\psi\in D\bigl(H_{\mathrm{b}}^{1/2}\bigr)$ と $x\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$\|\phi_0(g(x))\psi\|\le\sqrt{2}\|g(x)\|_{-1}\bigl\|H_{\mathrm{b}}^{1/2}\psi\bigr\|+\frac{1}{\sqrt{2}}\|g(x)\|_{-1/2}\|\psi\|. \tag{9.17}$$

したがって

$$\mathcal{N}_g(x):=\sqrt{2}\|g(x)\|_{-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\|g(x)\|_{-1/2},\quad \|\mathcal{N}_g\|_\infty:=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathcal{N}_g(x)<\infty \tag{9.18}$$

[2] E. Nelson, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1190–1197.
[3] もちろん，他の型の一般化も可能であるが，ここでは，最も単純な型の一般化のみを考える．

とおけば

$$\|\phi_0(g(x)\psi\| \le \|\mathcal{N}_g\|_\infty \big\|(H_{\rm b}+1)^{1/2}\psi\big\|, \quad \psi \in D\big(H_{\rm b}^{1/2}\big) \tag{9.19}$$

が成り立つ．したがって，補題 9.5 によって

$$\|\phi_0(g(x)\psi\|^2 \le \varepsilon\|(H_{\rm b}+1)\psi\|^2 + b_\varepsilon\|\psi\|^2, \quad \varepsilon>0,\ \psi\in D(H_{\rm b}). \tag{9.20}$$

ただし

$$b_\varepsilon := \frac{\|\mathcal{N}_g\|_\infty^4}{4\varepsilon}. \tag{9.21}$$

【補題 9.6】　B を $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 上の稠密に定義された閉作用素とする．$\Psi \in D(I\otimes B)$ とする．このとき，a.e.x に対して，$(U_{\mathcal{F}}\Psi)(x) \in D(B)$ であり

$$(U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)\Psi)(x) = B(U_{\mathcal{F}}\Psi)(x), \quad \text{a.e.}x \tag{9.22}$$

が成り立つ．

証明　$\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}D(B)$ に対しては (9.22) が成り立つことは容易にわかる ($\because$ $(U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)(f\otimes\psi))(x) = f(x)B\psi = B(f\times\psi)(x) = B(U_{\mathcal{F}}(f\otimes\psi))(x)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi\in D(B)$)．任意の $\Psi \in D(I\otimes B)$ に対しては，点列 $\Psi_n \in L^2(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}D(B)$ で $\Psi_n \to \Psi$, $(I\otimes B)\Psi_n \to (I\otimes B)\Psi$ $(n\to\infty)$ となるものがとれる．すぐ前に示したことから，$(U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)\Psi_n)(x) = B(U_{\mathcal{F}}\Psi_n)(x)$, a.e.$x$. $U_{\mathcal{F}}$ は有界であるから，$U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)\Psi_n \to U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)\Psi$．適当な部分列にうつれば，これは a.e.$x$ に関する収束を意味する．$U_{\mathcal{F}}\Psi_n$ についても同様である．そこで，そのような部分列をあらためて Ψ_n とすれば，$(U_{\mathcal{F}}\Psi_n)(x) \to (U_{\mathcal{F}}\Psi)(x)$, $B(U_{\mathcal{F}}\Psi_n)(x) \to (U_{\mathcal{F}}(I\otimes B)\Psi)(x)$, a.e.$x$ $(n\to\infty)$．B は閉であるから，$(U_{\mathcal{F}}\Psi)(x) \in D(B)$ かつ (9.22) が成立する．∎

【定理 9.7】　$D(H_{\rm N}) = D(K)$ かつ $H_{\rm N}$ は自己共役であり，下に有界である．さらに K の任意の芯は $H_{\rm N}$ の芯である．

証明　$\Psi \in D(K) \subset D(I\otimes H_{\rm b})$ に対して，補題 9.6 によって，$\widetilde{\Psi} := (U_{\mathcal{F}}\Psi)(x) \in D(H_{\rm b})$ である．さらに (9.20) によって

$$\int_{\mathbb{R}^d}\|\phi_0(g(x))\widetilde{\Psi}(x)\|^2\,dx \le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\big\|(H_{\rm b}+1)\widetilde{\Psi}(x)\big\|^2\,dx + b_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\big\|\widetilde{\Psi}(x)\big\|^2\,dx$$

$$= \varepsilon \| I \otimes (H_{\mathrm{b}} + 1)\Psi \|^2 + b_\varepsilon \|\Psi\|^2.$$

したがって，$\widetilde{\Psi} \in D\big(\widetilde{H}_I(g)\big)$ であるから，$\Psi \in D(H_I(g))$ であり（したがって，$D(H_{\mathrm{N}}) = D(K)$）

$$\|H_I(g)\Psi\|^2 \le \varepsilon \| I \otimes (H_{\mathrm{b}} + 1)\Psi \|^2 + b_\varepsilon \|\Psi\|^2.$$

自己共役作用素のテンソル積の一般論により，$\bar{H}_V \otimes I$ と $I \otimes H_{\mathrm{b}}$ は強可換である．したがって，付録 C の定理 C.8 の応用により

$$\| I \otimes (H_{\mathrm{b}} + 1)\Psi \|^2 \le \|(K+1)\Psi\|^2$$

が成り立つ．ゆえに

$$\|H_I(g)\Psi\| \le \sqrt{\varepsilon}\|(K+1)\Psi\| + \sqrt{b_\varepsilon}\|\Psi\|. \tag{9.23}$$

$\sqrt{\varepsilon}$ はいくらでも小さくとれるから，加藤–レリッヒの定理（付録 C，定理 C.15）により，題意が成立する． ∎

次に一般化されたネルソン型モデルのハミルトニアン $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ の自己共役性について考察する．結果から述べると次の定理が得られる．

【定理 9.8】 付加的な条件として，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $g(x) \in D(h^{1/2})$ かつ

$$0 < C(g) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} c_{h^{-1/2}g(x)}\big(c_{h^{-1/2}g(x)} + c_{h^{1/2}g(x)}\big) < \infty \tag{9.24}$$

が満たされるとする．ただし，$c_f (f \in D(h^{-1/2}))$ は (6.139) で定義される定数である．このとき

$$0 \le \lambda < \frac{1}{2C(g)} \tag{9.25}$$

ならば，$D(H_{\mathrm{N}}(\lambda)) = D(K)$ であり，$H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ は自己共役かつ下に有界である．さらに，K の任意の芯は $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ の芯である．

証明 (6.148) によって，任意の $\Psi \in D(H_{\mathrm{b}})$ と $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}\big\|\phi_0(g(x))^2\Psi(x)\big\| &\le 2c_{h^{-1/2}g(x)}\big(c_{h^{-1/2}g(x)} + c_{h^{1/2}g(x)}\big)\|(H_{\mathrm{b}}+1)\Psi(x)\| \\ &\le 2C(g)\|(H_{\mathrm{b}}+1)\Psi(x)\|.\end{aligned}$$

したがって

$$\lambda\big\|H_I(g)^2\Psi\big\| \le 2\lambda C(g)\|(H_{\mathrm{b}}+1)\Psi\|.$$

これと (9.23) によって

$$\big\|(H_I(g)+\lambda H_I(g)^2)\Psi\big\| \le (\sqrt{\varepsilon}+2\lambda C(g))\|(K+1)\Psi\| + \sqrt{b_\varepsilon}\|\Psi\|$$

を得る．(9.25) によって，$\varepsilon > 0$ が十分小ならば $\sqrt{\varepsilon}+2\lambda C(g) < 1$ が成り立つ．したがって，加藤–レリッヒの定理（付録 C，定理 C.15）により，定理の主張がしたがう． ∎

9.3　汎関数積分表示

任意の $t > 0$ と任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}$ に対して，$\langle \Phi, e^{-tH_{\mathrm{N}}}\Psi\rangle$ の汎関数積分表示を導こう．この目的のために，ボース場の理論を Q 表示にうつって考える．すなわち，$L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ で考える．Q 表示における全ヒルベルト空間は

$$\hat{\mathcal{F}} := (I\otimes U)\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^d)\otimes L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}) \cong L^2(\mathbb{R}^d; L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})) \quad (9.26)$$

である．ただし，U は 7.7 節で導入した $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$ へのユニタリ変換である．

ヒルベルト空間 $\hat{\mathcal{F}}$ は，$L^2(\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}, dx\otimes d\mu_{\mathcal{H}})$ と自然な仕方で同型である：

$$\hat{\mathcal{F}} \cong L^2(\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}, dx\otimes d\mu_{\mathcal{H}}). \quad (9.27)$$

この場合の同型対応は，$f\otimes\psi$ ($f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi\in L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})$) に対して，$(f\times\psi)(x,q) := f(x)\psi(q)$, a.e.$(x,q)\in\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}$ によって定義される関数 $f\times\psi$ を対応させるユニタリ変換である．以下，この同型による諸対象の同一視をしばしば用いる．

Q 表示における $H_{\mathrm{N}}, H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ をそれぞれ，$\hat{H}_{\mathrm{N}}, \hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)$ と記す：

$$\hat{H}_{\mathrm{N}} := (I\otimes U)H_{\mathrm{N}}(I\otimes U)^{-1} = \bar{H}_V + H_{0,\mathrm{F}} + \hat{H}_I(g), \quad (9.28)$$

$$\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda) := (I\otimes U)H_{\mathrm{N}}(\lambda)(I\otimes U)^{-1} = \bar{H}_V + H_{0,\mathrm{F}} + \hat{H}_I(g) + \lambda\hat{H}_I(g)^2. (9.29)$$

ただし，$\hat{H}_I(g)$ は $\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}$ 上の実数値可測関数：$(x,q)\mapsto\phi_{\mathrm{F}}(g(x))(q)$ による掛算作用素を表す：

$$D\big(\hat{H}_I(g)\big) = \left\{\Psi\in L^2(\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}, dx\otimes d\mu_{\mathcal{H}}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}}} |\phi_{\mathrm{F}}(g(x))(q)|^2\right.$$

$$\left.\times|\Psi(x,q)|^2\,dx\otimes d\mu_{\mathcal{H}}(q)<\infty\right\}, \tag{9.30}$$

$$\big(\hat{H}_I(g)\Psi\big)(x,q)=\phi_{\mathrm{F}}(g(x))(q)\Psi(x,q), \quad \text{a.e.}(x,q). \tag{9.31}$$

(9.28) における第 2 の等号は，同型 (9.27) のもとでの同一視による表示である．

第 4 章の補題 4.26 によって任意の有界な $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{\mathsf{W}}|f(\varphi(t))|^2\,d\mu_0=\int_{\mathsf{W}}|f(\varphi(0))|^2\,d\mu_0=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx, \quad t>0$$

が成り立つ．そこで各 $t\geq 0$ に対して，写像 $u_t: L^2(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathsf{W},d\mu_0)$ を

$$u_tf:=f(\varphi(t)), \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \tag{9.32}$$

によって定義すれば，u_t は線形であり，$\|u_tf\|=\|f\|$ を満たす．すなわち，u_t は等距離線形作用素である．$L^2(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であるから，拡大定理により，u_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ から $L^2(\mathsf{W},d\mu_0)$ への等距離線形作用素に一意的に拡大される．この拡大も同じ記号 u_t で表す．このとき

$$u_tf=f(\varphi(t)), \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d),\ t\geq 0 \tag{9.33}$$

が成り立つことがわかる．

さて

$$\mathcal{E}:=L^2(\mathsf{W},d\mu_0)\otimes L^2(Q_{\mathrm{E}},d\mu_{\mathrm{E}}) \tag{9.34}$$

とおく．このヒルベルト空間は $L^2(\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}},d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}})$ と自然な仕方で同型である：

$$\mathcal{E}\cong L^2(\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}},d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}). \tag{9.35}$$

以下，この同型のもとでの同一視を用いる．

作用素 u_t と 7.7 節で導入した等距離作用素 J_t を用いて定義される作用素

$$L_t:=u_t\otimes J_t:\hat{\mathfrak{F}}\to\mathcal{E} \tag{9.36}$$

は等距離作用素である．

$L^2(\mathbb{R}^d\times Q_{\mathcal{H}},dx\otimes d\mu_{\mathcal{H}})$ 上の作用素 $\widetilde{K}$ と $\widetilde{K}_0$ を次のように定義する：

$$\widetilde{K}:=\bar{H}_V+H_{0,\mathrm{F}}, \quad \widetilde{K}_0:=H_0+H_{0,\mathrm{F}} \tag{9.37}$$

$G \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k)$ $(k \in \mathbb{N})$，$g_\ell : \mathbb{R}^d \to \mathcal{H}_{-1/2}$ $(\ell = 1, \cdots, k)$ を（$\bar{\mathcal{H}}_{-1/2}$ の位相で）強連続な写像，$\mathbf{g} := (g_1, \cdots, g_k)$ とし

$$G_{\mathbf{g}}(x,q) := G(x, \phi_{\mathrm{F}}(g_1(x))(q), \cdots, \phi_{\mathrm{F}}(g_k(x)(q))), \quad (x,q) \in \mathbb{R}^d \times Q_{\mathcal{H}} \quad (9.38)$$

とおく．明らかに，$G_{\mathbf{g}}$ は $\mathbb{R}^d \times Q_{\mathcal{H}}$ 上の本質的に有界な可測関数である．各 $t \geq 0$ に対して，$\mathsf{W} \times Q_{\mathrm{E}}$ 上の関数

$$G_{\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t) := G(\varphi(t), \phi_{\mathrm{E}}(t, g_1(\varphi(t))), \cdots, \phi_{\mathrm{E}}(t, g_k(\varphi(t)))) \quad (9.39)$$

を導入する．

【定理 9.9】　$G_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k)$ $(j = 1, \cdots, n-1\ (n \geq 2))$ とし

$$G_{j,\mathbf{g}} := (G_j)_{\mathbf{g}}, \quad G_{j,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t) := (G_j)_{\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t), \quad t \geq 0 \quad (9.40)$$

とおく．また $\Psi_0, \Psi_n \in \hat{\mathfrak{F}}$, $0 < t_1 < t_1 < \cdots < t_n$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\left\langle \Psi_0, e^{-t_1 \tilde{K}_0} G_{1,\mathbf{g}}\, e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}_0} G_{2,\mathbf{g}} \cdots G_{n-1,\mathbf{g}}\, e^{-(t_n - t_{n-1})\tilde{K}_0} \Psi_n \right\rangle \\ &\quad = \int_{\mathsf{W} \times Q_{\mathrm{E}}} (L_0 \Psi_0)^* G_{1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_1) \cdots G_{n-1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_{n-1}) (L_{t_n} \Psi_n)\, d\mu_0 \otimes d\mu_{\mathrm{E}}. \quad (9.41)\end{aligned}$$

証明　$\hat{\mathfrak{F}}$ を $L^2(\mathbb{R}^d; L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}}))$ と同一視して考察する．$(G_j(x))(q) := G_{j,\mathbf{g}}(x,q)$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}&\left\langle \Psi_0, e^{-t_1 \tilde{K}_0} G_{1,\mathbf{g}}\, e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}_0} G_{2,\mathbf{g}} \cdots G_{n-1,\mathbf{g}}\, e^{-(t_n - t_{n-1})\tilde{K}_0} \Psi_n \right\rangle \\ &\quad = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} P_{t_1}(x, x_1) P_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) \\ &\qquad \times \Big\langle \Psi_0(x), e^{-t_1 H_{0,\mathrm{F}}} G_1(x_1)\, e^{-(t_2-t_1)H_{0,\mathrm{F}}} G_2(x_2) \cdots G_{n-1}(x_{n-1}) \\ &\qquad \times e^{-(t_n - t_{n-1})H_{0,\mathrm{F}}} \Psi_n(x_n) \Big\rangle_{L^2(Q_{\mathcal{H}}, d\mu_{\mathcal{H}})} dx\, dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

そこで

$$G_j^{\mathrm{E}}(t,x) := G_{j,\mathbf{g}}(x, \phi_{\mathrm{E}}(t, g_1(x)), \cdots, \phi_{\mathrm{E}}(t, g_k(x)))$$

とおけば，定理 7.9 により

$$\big\langle \Psi_0(x), e^{-t_1 H_{0,\mathrm{F}}} G_1(x_1)\, e^{-(t_2-t_1)H_{0,\mathrm{F}}} G_2(x_2)$$

$$
\begin{aligned}
&\times\cdots G_{n-1}(x_{n-1})\,e^{-(t_n-t_{n-1})H_{0,\mathrm{F}}}\Psi_n(x_n)\big\rangle\\
&=\int_{Q_{\mathrm{E}}}(J_0\Psi_0(x))^*G_1^{\mathrm{E}}(t_1,x_1)G_2^{\mathrm{E}}(t_2,x_2)\\
&\quad\times\cdots G_{n-1}^{\mathrm{E}}(t_{n-1},x_{n-1})(J_{t_n}\Psi_n(x_n))\,d\mu_{\mathrm{E}}.
\end{aligned}
$$

これと補題 4.25 によって (9.41) が得られる（積分順序交換についてはフビニの定理の成立条件を検証せよ）. ∎

【定理 9.10】 $V\in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とする．$n\in\mathbb{N}$, $\Psi_0,\Psi_n\in\hat{\mathfrak{F}}$, $G_j\in L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k)$ $(j=1,\cdots,n)$, $0<t_1<t_1<\cdots<t_n$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&\big\langle\Psi_0,e^{-t_1\tilde{K}}G_{1,\mathbf{g}}\,e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}}G_{2,\mathbf{g}}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\tilde{K}}\Psi_n\big\rangle\\
&=\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}}(L_0\Psi_0)^*G_{1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_1)\cdots G_{n-1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_{n-1})\\
&\quad\times(L_{t_n}\Psi_n)\,e^{-\int_0^{t_n}V(\varphi(s))\,ds}\,d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}.
\end{aligned}
\tag{9.42}
$$

証明 トロッター–加藤の積公式（付録 C，定理 C.22）により

$$
\begin{aligned}
&\big\langle\Psi_0,e^{-t_1\tilde{K}}G_{1,\mathbf{g}}\,e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}}G_{2,\mathbf{g}}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\tilde{K}}\Psi_n\big\rangle\\
&=\lim_{N_1\to\infty}\cdots\lim_{N_n\to\infty}\Big\langle\Psi_0,\left(e^{-t_1K_0/N_1}\,e^{-t_1V/N_1}\right)^{N_1}\\
&\quad\times G_{1,\mathbf{g}}\left(e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}_0/N_2}\,e^{-(t_2-t_1)V/N_2}\right)^{N_2}\\
&\quad\times G_{2,\mathbf{g}}\cdots\left(e^{-(t_n-t_{n-1})\tilde{K}_0/N_n}\,e^{-(t_n-t_{n-1})V/N_n}\right)^{N_n}\Psi_n\Big\rangle
\end{aligned}
$$

$s>0$ ならば e^{-sV} は有界な関数であるから，定理 9.9 を応用することができ

$$
\begin{aligned}
&\big\langle\Psi_0,e^{-t_1\tilde{K}}G_{1,\mathbf{g}}\,e^{-(t_2-t_1)\tilde{K}}G_{2,\mathbf{g}}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\tilde{K}}\Psi_n\big\rangle\\
&=\lim_{N_1\to\infty}\cdots\lim_{N_n\to\infty}\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}}(L_0\Psi_0)^*G_{1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_1)\\
&\quad\times\cdots G_{n-1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_{n-1})(L_{t_n}\Psi_n)\,e^{-\sum_{j_1=1}^{N_1}t_1V(\varphi(j_1t_1/N_1))/N_1}\\
&\quad\times e^{-\sum_{j_2=1}^{N_2}(t_2-t_1)V(t_1+j_2(t_2-t_1)/N_2)/N_2}\\
&\quad\times\cdots e^{-\sum_{j_n=1}^{N_n}(t_n-t_{n-1})V(t_{n-1}+j_n(t_n-t_{n-1})/N_n)/N_n}\,d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}\\
&=\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}}(L_0\Psi_0)^*G_{1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_1)\cdots G_{n-1,\mathbf{g}}^{\mathrm{E}}(t_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$\times\,(L_{t_n}\Psi_n)\,e^{-\int_0^{t_1}V(\varphi(s))\,ds}\,e^{-\int_{t_1}^{t_2}V(\varphi(s))\,ds}\cdots e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n}V(\varphi(s))\,ds}\,d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}.$$

ここで，最後の等号を得るのに，ルベーグの優収束定理を用いた．したがって，(9.42) が成立する． ∎

定理 9.8 で見たように，λ が条件 (9.25) を満たせば，$H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ は自己共役で下に有界である．そこで

$$\Lambda_{\mathrm{s.a}} := \{\lambda \geq 0 \mid H_{\mathrm{N}}(\lambda)\ \text{は自己共役で下に有界}\} \tag{9.43}$$

とおく．

【定理 9.11】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$, $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{s.a.}}$ とする．このとき，すべての $\Phi, \Psi \in \hat{\mathfrak{F}}$ と $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)}\Psi\right\rangle = &\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}}(L_0\Phi)^*(L_t\Psi)\,e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\\ &\times e^{-\int_0^t(\phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))+\lambda\phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))^2)\,ds}\,d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}.\end{aligned} \tag{9.44}$$

証明　任意の $\Psi \in D(H_I(g)^2)$ に対して

$$\left\langle\Psi, (H_I(g)+\lambda H_I(g)^2)\Psi\right\rangle = \lambda\left\|\left(H_I(g)+\frac{1}{2\lambda}\right)\Psi\right\|^2 - \frac{1}{4\lambda}\|\Psi\|^2 \geq -\frac{1}{4\lambda}\|\Psi\|^2$$

であるから，$H_I(g)+\lambda H_I(g)^2$ は下に有界である．したがって，トロッター–加藤の積公式（付録 C，定理 C.22）によって

$$\left\langle\Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)}\Psi\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle\Phi, \left(e^{-t\tilde{K}/n}\,e^{-t(\hat{H}_I(g)+\lambda\hat{H}_I(g)^2)/n}\right)^n\Psi\right\rangle.$$

$G(x,y) = e^{-t(y+\lambda y^2)}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}$ とおけば G は有界であり

$$G(x, \phi_{\mathrm{F}}(g(x))) = e^{-t(\phi_{\mathrm{F}}(g(x))+\lambda\phi_{\mathrm{F}}(g(x))^2}$$

が成り立つ．したがって，定理 9.10 によって

$$\begin{aligned}&\left\langle\Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)}\Psi\right\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}}(L_0\Phi)^*(L_t\Psi)\,e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\\ &\quad\times e^{-\sum_{j=1}^n(\phi_{\mathrm{E}}(jt/n,g(\varphi(jt/n)))+\lambda\phi_{\mathrm{E}}(jt/n,g(\varphi(jt/n)))^2)t/n}\,d\mu_0\otimes d\mu_{\mathrm{E}}\end{aligned}$$

そこで，ルベーグの優収束定理を用いれば (9.44) が得られる． ■

定理 9.11 から，ネルソン型モデルのハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{N}}$ (Q 表示) が生成する熱半群 $e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}}$ に対する汎関数積分表示を導くことができる：

【定理 9.12】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，すべての $\Phi, \Psi \in \hat{\mathfrak{F}}$ と $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\left\langle \Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}}\Psi \right\rangle \\ &\quad = \int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}} (L_0\Phi)^*(L_t\Psi)\, e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\, e^{-\int_0^t \phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))\,ds}\, d\mu_0 \otimes d\mu_{\mathrm{E}}. \quad (9.45)\end{aligned}$$

証明 (9.45) は $\Psi, \Phi \geq 0$ の場合に示せば十分である．L_t は正値性保存作用素であるから，$(L_0\Phi)^*, L_t\Psi \geq 0$ である．$\phi_{\mathrm{E}}(s, g(\varphi(s)))^2 \geq 0$ であるから

$$0 \leq e^{-\lambda \int_0^t \phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))^2\,ds} < 1$$

であり，$e^{-\lambda \int_0^t \phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))^2\,ds}$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき，単調増大しながら，1 (a.e.) に収束する．他方

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \left\langle \Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)}\Psi \right\rangle = \left\langle \Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}}\Psi \right\rangle.$$

したがって，(9.44) の右辺は，単調収束定理により，$\lambda \downarrow 0$ のとき

$$\int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathrm{E}}} (L_0\Phi)^*(L_t\Psi)\, e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\, e^{-\int_0^t \phi_{\mathrm{E}}(s,g(\varphi(s)))\,ds}\, d\mu_0 \otimes d\mu_{\mathrm{E}} < \infty$$

に収束し，これは $\left\langle \Phi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}}\Psi \right\rangle$ に等しい．したがって，(9.45) が成立する． ■

【系 9.13】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とし，$\lambda \in \Lambda_{\mathrm{s.a.}}$ とする．このとき，すべての $t > 0$ とに対して，$e^{-t\hat{H}_{\mathrm{N}}(\lambda)}$ は正値性改良作用素である．

証明 定理 9.12 と定理 9.11 が成立しているので，系 7.21 の証明と同じ論法によって求める結果が得られる． ■

9.4 基底状態の一意性

【定理 9.14】 $V \in C_{\mathrm{bb}}(\mathbb{R}^d)$ とし，$\lambda \in \Lambda_{\mathrm{s.a.}}$ とする．もし，$H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ が基底状態

をもつならば，それは定数倍を除いてただ1つである．さらに $H_{\mathrm{N}}(\lambda)$ の基底状態 Ψ_0 で $U_{\mathcal{F}}\Psi_0 > 0$ となるものがとれる．

証明　定理7.22の証明と同様．∎

9.5　非相対論的量子電磁力学のモデル

本章を終えるにあたって，非相対論的量子電磁力学の相互作用モデルにおける汎関数積分表示についてふれておきたい．紙幅の都合上，概略だけを述べる．簡単のため，最も単純なモデル──1個の荷電量子的粒子（スピン自由度は考慮にいれない）と量子輻射場の相互作用モデル──を考える．記号は，特に断らないかぎり，第8章のそれをそのまま踏襲する．粒子が存在する空間は $\mathbb{R}^3$ であるとする．モデル構成の上で基礎となるヒルベルト空間は，1個の量子的粒子のヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ と量子輻射場のフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}$ のテンソル積

$$\mathcal{F}_{\mathrm{PF}} := L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{rad}} \tag{9.46}$$

である（"PF" は，このモデルの考案者 "パウリ (W. Pauli) & フィールツ (M. Fierz)" にちなむ）．

量子的粒子と量子輻射場の相互作用を定義するために，関数 $\chi : \mathbb{R}^3_k \to \mathbb{R}$ で $\chi/\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}} \in L^2(\mathbb{R}^3_k)$ を満たすものを任意に固定し，各 $x \in \mathbb{R}^3$ と $j = 1,2,3$ に対して，$\mathbb{R}^3_k$ 上の $\mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$ 値関数 $G_j(x)$ を

$$G_j(x)(k) := \left(\frac{\chi(k)\, e^{-ikx}}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}(k)}}\, e_j^{(1)}(k), \frac{\chi(k)\, e^{-ikx}}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}(k)}}\, e_j^{(2)}(k) \right) \in \mathbb{C}^2, \quad k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \tag{9.47}$$

によって導入する（$G_j(x) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$）．この $G_j(x)$ を用いて，各 $x \in \mathbb{R}^3$ ごとに定まる $\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の作用素

$$A_j^{(\chi)}(x) := \Phi_{\mathrm{S}}(G_j(x)) \tag{9.48}$$

を定義する．これを**点様の自由量子輻射場**という．この文脈では，関数 χ は**運動量切断**と呼ばれる[4]．自然な同型

$$\mathcal{F}_{\mathrm{PF}} \cong L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}_{\mathrm{rad}})$$

---

[4] 典型的な例は，κ を正の実数として，$\chi(k) = \chi_{[0,\kappa]}(|k|)/\sqrt{(2\pi)^3}$, $k \in \mathbb{R}^3$ によって与えられる．

のもとで（以後，この同一視を自由に用いる），$A_j^{(\chi)}(x)$ は次のように定義される，$\mathcal{F}_{\mathrm{PF}}$ 上の作用素 $A_j^{(\chi)}$ へ拡大される：

$$D(A_j^{(\chi)}) := \left\{ \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}_{\mathrm{rad}}) \;\middle|\; \Psi(x) \in D\big(A_j^{(\chi)}(x)\big),\ \text{a.e.}x, \right. \\ \left. \int_{\mathbb{R}^3} \big\| A_j^{(\chi)}(x)\Psi(x) \big\|_{\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}}^2 dx < \infty \right\}, \tag{9.49}$$

$$\big(A_j^{(\chi)}\Psi\big)(x) := A_j^{(\chi)}(x)\Psi(x), \quad \Psi \in D\big(A_j^{(\chi)}\big). \tag{9.50}$$

系のハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{PF}} := \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\Big(p_j - qA_j^{(\chi)}\Big)^2 + V + H_{\mathrm{rad}} \tag{9.51}$$

によって定義される．ただし，$p_j := -iD_j$ は粒子の運動量の第 j 成分を表し，$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ はポテンシャル，$m > 0$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ はそれぞれ，量子的粒子の質量と電荷──**結合定数**ともいう──である．このモデルは**パウリ–フィールツモデル**と呼ばれ，H_{PF} を**パウリ–フィールツハミルトニアン**という[5]．作用素 H_{PF} は磁場の入ったシュレーディンガー作用素 $H_V(\mathbf{a})$（第 5 章を参照）と形は似ているが，$A_j^{(\chi)}$ が通常の関数ではないこと，および量子輻射場の自由ハミルトニアン H_{rad} が含まれている点で本質的に異なる．だが，反磁性不等式など定性的な性質のいくつかは，パウリ–フィールツモデルでも成立することが示される[6]．

パウリ–フィールツハミルトニアン H_{PF} の本質的自己共役性は自明ではない．だが，結合定数の絶対値 $|q|$ が十分小さい場合には，その自己共役性を証明するのはそれほど難しくはない．結果だけを述べる[7]：

【定理 9.15】 $p^2/2m+V$ は自己共役で下に有界であるとし，$\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}\,\chi, \chi, \chi/\omega_{\mathrm{ph}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき，ある定数 $q_0 > 0$ があって，$|q| < q_0$ ならば，$D(H_{\mathrm{PF}}) = D(p^2) \cap D(V) \cap D(H_{\mathrm{rad}})$ かつ H_{PF} は下に有界な自己共役作用素である．

---

[5] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, *Nuovo Cimento*, **15** (1938), 167–188.

[6] 拙著，『フォック空間と量子場 下』（日本評論社，2000）の定理 13.26 を参照．

[7] 証明については，拙著，『フォック空間と量子場 下』（日本評論社，2000）の定理 13.25 を参照．手法は，加藤–レリッヒの定理（付録 C，定理 C.15）と閉グラフ定理から導かれる基本的事実（付録 C，補題 C.21）を応用することである．

ここでは，言及するだけに留めざるをえないが，実は，V, χ に対する適切な条件のもとで，任意の結合定数 q に対して，$H_{\rm PF}$ の（本質的）自己共役性を証明することができる．だが，この証明は，それだけで 1 つの論文となるほどに長い緻密な作用素論的解析を必要とする[8].

$H_{\rm PF}$ が下に有界な自己共役作用素であるとき，それによって生成される熱半群 $e^{-tH_{\rm PF}}$ に関する汎関数積分表示は以下に述べる手順で導かれる．量子輻射場に関する記号は第 8 章のものを用いる．Q 表示におけるパウリ–フィールツハミルトニアンを $\hat{H}_{\rm PF}$ と記す．

各 $t \geq 0$ に対して，正値性を保存する等距離作用素 $I_t : L^2(Q_{\rm ph}, d\mu_{\rm ph}) \to L^2(Q_{\mathcal{A}}, d\mu_{\mathcal{A}})$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{R}^n$ 上の有界なボレル可測関数 F および $\mathbf{f}_j \in \oplus^3 \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$$I_t F(\mathcal{A}^0(\mathbf{f}_1), \cdots, \mathcal{A}^0(\mathbf{f}_n)) = F(\mathcal{A}_{\rm E}(t, \mathbf{f}_1), \cdots, \mathcal{A}_{\rm E}(t, \mathbf{f}_n)) \tag{9.52}$$

を満たすものが存在する．証明は，定理 7.17 の場合と同様である．

9.3 節で導入した作用素 u_t（ただし，$d = 3$ の場合）を用いて

$$\begin{aligned} M_t := u_t \otimes I_t : L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(Q_{\rm ph}, d\mu_{\rm ph}) &\to L^2(\mathsf{W}, d\mu_0) \otimes L^2(Q_{\mathcal{A}}, d\mu_{\mathcal{A}}) \\ &\cong L^2(\mathsf{W} \times Q_{\mathcal{A}}, d\mu \otimes d\mu_{\rm E}) \end{aligned} \tag{9.53}$$

を定義すれば（ここでの W は $d = 3$ の場合のそれ），これは正値性を保存する等距離作用素である．

各 $x \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\chi_x \in \mathcal{S}_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ を

$$\hat{\chi}_x(k) := \chi(k)\, e^{-ikx}, \quad \text{a.e.} k \in \mathbb{R}^3 \tag{9.54}$$

によって定義する．これを用いると

$$A_j^{(\chi)}(x) = A_j(\chi_x), \quad j = 1, 2, 3 \tag{9.55}$$

と書ける．

---

[8] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré*, **3** (2002), 171–201; D. Hasler and I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Reviews in Mathematical Physics*, **20** (2008), 787–800 を参照．前者は汎関数積分法を援用し，後者は純作用素論的な手法を用いている．

$\mathbb{R}^4$ 上の実緩増加超関数 F で $\int_{\mathbb{R}^4} dp\,|\hat{F}(p)|^2/p^2 < \infty$ を満たすもの全体を $\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^4)$ とする．詳細は省略するが，各 $j = 1, 2, 3$ と $t > 0$ に対して，$\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^4)$ に値をとる確率積分（W から $\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^4)$ への可測写像）

$$S_j^{(\chi)}(t) := \int_0^t \delta_s \times \chi_{\varphi(s)}\, d\varphi_j(s) \tag{9.56}$$

が定義される．ただし，$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s)) : \mathsf{W} \to \mathbb{R}^3$ は (4.83)（$d = 3$ の場合）によって定義される写像である．したがって

$$\mathbf{S}^{(\chi)}(t) := \left(S_1^{(\chi)}(t), S_2^{(\chi)}(t), S_3^{(\chi)}(t)\right) \tag{9.57}$$

は $\oplus^3\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^4)$ に値をとる確率積分である（W から $\oplus^3\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^4)$ への可測写像）．これを用いると，V と χ に対する適切な条件のもとで次の汎関数積分表示が得られる[9]：任意の $\Psi, \Phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(Q_{\mathrm{ph}}, d\mu_{\mathrm{ph}})$ と $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\langle \Psi, e^{-t\hat{H}_{\mathrm{PF}}}\Phi \right\rangle \\ &\quad = \int_{\mathsf{W}\times Q_{\mathcal{A}}} d\mu_0 \otimes d\mu_{\mathcal{A}}\, e^{-\int_0^t V(\varphi(s))\,ds}\, e^{-i\mathcal{A}(\mathbf{S}^{(\chi)}(t))}(M_0\Psi)^* M_t\Phi. \end{aligned} \tag{9.58}$$

条件の詳細と (9.58) の証明については，原著論文（F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Reviews in Mathematical Physics*, **9** (1997), 489–530）を参照されたい．

関連図書

[1] 新井朝雄，『フォック空間と量子場 上下』，日本評論社，2000.

[2] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Reviews in Mathematical Physics*, **13** (2001), 1075–1094.

[3] 江沢 洋・新井朝雄，『場の量子論と統計力学』，日本評論社，1988.

[4] C. Fefferman, J. Fröhlich and G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, *Communications in Mathematical Physics*, **190** (1997), 309–330.

[9] 基本的な考え方は，磁場の入ったシュレーディンガー作用素に対するファインマン–カッツ–伊藤の公式（第 5 章を参照）を導く場合と同様である．

[5] J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless scalar bosons, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **19** (1973), 1–103.

[6] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré*, **1** (2000), 443–459.

[7] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[8] D. Hasler and I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Reviews in Mathematical Physics*, **20** (2008), 787–800.

[9] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Reviews in Mathematical Physics*, **9** (1997), 489–530.

[10] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré*, **3** (2002), 171–201.

[11] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, *Topics in the Theory of Schrödinger operators* (Editors:H. Araki and H. Ezawa, World Scientific, 2004), 145–272.

[12] 廣島文生，非相対論的量子電気力学，『現代物理学の歴史 II──物性・生物・数理物理』(朝倉書店，2004)，570–590.

[13] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Mathematical Physics*, **5** (1964), 1190–1197.

[14] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, *Nuovo Cimento*, **15** (1938), 167–188.

[15] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[16] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[17] H. Spohn, Ground state of a quantum particle coupled to a scalar Bose field, *Letters in Mathematical Physics*, **44** (1998), 9-16.

[18] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.

付録 A

解析学におけるいくつかの基本定理

A.1 ボレル–カンテリの定理と積分変数の変換公式

(M, Σ, μ) を測度空間とする．

【定理 A.1】 $\mu(M) < \infty$ とする．$A_n \in \Sigma$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \quad \mu(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = \mu(M)$$

が成り立つ[1]．

$\mu(M) = 1$ の場合，すなわち，(M, Σ, μ) が確率空間の場合，この定理は**ボレル–カンテリの定理**の一部をなすものである．

【定理 A.2】(積分変数の変換公式) ϕ を (M, Σ, μ) 上の可積分関数とし，$\Phi(A) := \int_A \phi(x)\, d\mu(x)$, $A \in \Sigma$ とおく（このとき，Φ は Σ 上の加法的集合関数である）．f は M 上の Σ 可測関数で $\int_M |f(x)\phi(x)|\, d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする．このとき

$$\int_M f(x)\, d\Phi(x) = \int_M f(x)\phi(x)\, d\mu(x).$$

[1] 証明については，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1974，第 12 版) の §6，問 3 を参照．

ただし，左辺は Φ による f のルベーグ–スティルチェス積分を表す[2].

A.2　フリードリクスの軟化作用素

$\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で次の条件を満たすものを考える：

$$(\rho.1) \qquad \varrho(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

$$(\rho.2) \qquad |x| \geq 1 \text{ ならば } \varrho(x) = 0.$$

$$(\rho.3) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x)\,dx = 1.$$

各 $\varepsilon > 0$ に対して，関数 ϱ_ε を

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{A.1}$$

によって定義する．関数の族 $\{\varrho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を**軟化子**という．

容易にわかるように，$\varrho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varrho_\varepsilon(x) \geq 0$ であり

$$|x| \geq \varepsilon \text{ ならば } \varrho_\varepsilon(x) = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = 1$$

が成立する．

任意の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) := \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \int_{|x|\leq R} |f(x)|\,dx < \infty, \forall R > 0\right\}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varrho_\varepsilon(x-y)f(y)|\,dy \leq \frac{||\varrho||_\infty}{\varepsilon^d}\int_{|x-y|\leq\varepsilon} |f(y)|\,dy < \infty$$

であるから，作用素 J_ε が

$$(J_\varepsilon f)(x) := (\varrho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy \tag{A.2}$$

によって定義される．この作用素を**フリードリクスの軟化作用素** (mollifier) または単に**軟化作用素**という．この作用素の基本的性質を次の定理にまとめる[3].

[2] 証明については，伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1974，第 12 版) の p.150 を参照．

[3] 証明については，たとえば，黒田成俊，『関数解析』(共立出版，1980) の §6.2 を参照．軟化作用素は $\mathbb{R}^d$ 上の関数解析学のいろいろな場面で重要な役割を演じる．

【定理 A.3】

(i) 各 $\varepsilon > 0$ と任意の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$J_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ （$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数の全体）．もし，f が $\mathbb{R}^d$ 上で連続ならば，すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon f(x) = f(x). \tag{A.3}$$

(ii) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が有界な台 K をもつならば，$J_\varepsilon f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \forall\varepsilon > 0$ であり，$J_\varepsilon f$ の台は

$$K_\varepsilon := \{x + y \mid x \in K, |y| \le \varepsilon\}$$

に含まれる．

(iii) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ ならば，$J_\varepsilon f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ であり

$$\|J_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 \le p \le \infty,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 1 \le p < \infty$$

が成り立つ．

(iv) f が $\mathbb{R}^d$ 上で有界かつ一様連続ならば

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon f - f\|_\infty = 0.$$

(v) $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ ならば，$\mathbb{R}^d$ の任意のコンパクト集合 K に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\chi_K J_\varepsilon f - \chi_K f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

ただし，χ_K は K の定義関数である．

定理 A.3 の応用を 1 つ述べておく：

【定理 A.4】 $F, G \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $G \ge 0$ とし，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$|\langle f, F\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \le \langle |f|, G\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つとする．このとき，$|F(x)| \le G(x)$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$.

証明　$a \in \mathbb{R}^d$ を任意に固定し，$f(x) = \varrho_\varepsilon(a - x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ とする．このとき，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$ であるから，仮定の式から，$|(J_\varepsilon F)(a)| \leq (J_\varepsilon G)(a) \cdots (*)$. 定理 A.3-(iii) により

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon F - F\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon G - G\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

したがって，0 に収束する点列 $\{\varepsilon_k\}_k$ があって

$$\lim_{k \to \infty} (J_{\varepsilon_k} F)(x) = F(x), \quad \lim_{k \to \infty} (J_{\varepsilon_k} G)(x) = G(x), \quad \text{a.e.} x \in \mathbb{R}^d.$$

そこで，$(*)$ において，$\varepsilon = \varepsilon_k$, $a = x$ とし，$k \to \infty$ とすれば，求める結果が得られる．■

関連図書

[1]　伊藤清三,『ルベーグ積分入門』，裳華房，1974，第 12 版.

[2]　黒田成俊,『関数解析』，共立出版，1980.

付 録 B

ストーン–ヴァイエルシュトラースの定理

X を位相空間とし，X 上の実数値連続関数の全体と複素数値連続関数の全体をそれぞれ，$C_{\mathbb{R}}(X), C(X)$ で表す．$C(X)$ $(C_{\mathbb{R}}(X))$ は関数の和と複素数倍（実数倍）の演算に関して複素（実）ベクトル空間である．さらに，関数の積演算を付加して考えると，$C(X), C_{\mathbb{R}}(X)$ はそれぞれ，複素代数，実代数である．

X に属する相異なる任意の 2 点 x_1, x_2 に対して，x_1 の近傍 $U(x_1)$ と x_2 の近傍 $U(x_2)$ があって，$U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset$ が成り立つとき（ハウスドルフの分離公理），X は**ハウスドルフ空間**と呼ばれる．

X の各点 x に対して，x の基本近傍系 $\mathfrak{B}(x)$ で，各 $V \in \mathfrak{B}(x)$ の閉包 $\bar{V}$ がコンパクトであるようなものがとれるとき，X は**局所コンパクト**であるという．

X がコンパクトならば，X の任意の閉部分集合はコンパクトであるから，X は局所コンパクトである．

X が局所コンパクトかつハウスドルフ空間であるとき，X を**局所コンパクト・ハウスドルフ空間**という．同様に，X がコンパクトかつハウスドルフ空間であるとき，X を**コンパクト・ハウスドルフ空間**という．

明らかに，コンパクト・ハウスドルフ空間は局所コンパクト・ハウスドルフ空間である．

X がコンパクト・ハウスドルフ空間の場合，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{B.1}$$

は有限であり，対応：$C(X) \ni f \mapsto \|f\|_\infty$ は $C(X)$ のノルムである．このノル

ムを**上限ノルム** (supremum norm) または**一様ノルム** (uniform norm) と呼ぶ．

【定理 B.1】　X をコンパクト・ハウスドルフ空間とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ[1]：

(i) $C(X)$ は上限ノルムに関して複素バナッハ空間である．
(ii) $C_{\mathbb{R}}(X)$ は上限ノルムに関して実バナッハ空間である．

B を $C(X)$ または $C_{\mathbb{R}}(X)$ の部分集合とする．任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ に対して，$f \in B$ で $f(x) \neq f(y)$ を満たすものが存在するならば，B は X の**点を分離する**という．

【定理 B.2】（ストーン–ヴァイエルシュトラースの定理）　X をコンパクト・ハウスドルフ空間とする．B は $C_{\mathbb{R}}(X)$ の閉部分代数（i.e. B は $C_{\mathbb{R}}(X)$ の線形閉部分空間で，任意の $f, g \in B$ に対して，$fg \in B$ が成立）で X の点を分離するとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) $1 \in B$ ならば $B = C_{\mathbb{R}}(X)$．
(ii) $1 \notin B$ ならば $\{c + f \mid c \in \mathbb{R},\ f \in B\} = C_{\mathbb{R}}(X)$．

この定理の証明は簡単ではない．そこで，まず，証明のための準備をする．

X 上の実数値関数 f, g に対して，X 上の実数値関数 $f \wedge g$ と $f \vee g$ を

$$(f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \quad (f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in X \tag{B.2}$$

によって定義し，それぞれ，f と g の**交わり**，f と g の**結び**と呼ぶ．

有限個の実数値関数 $f_1, \cdots, f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \geq 3)$ の交わり $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n : X \to \mathbb{R}$ と結び $f_1 \vee \cdots \vee f_n : X \to \mathbb{R}$ は次のように定義される：

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x) := \min\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}, \tag{B.3}$$

$$(f_1 \vee \cdots \vee f_n)(x) := \max\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}, \quad x \in X. \tag{B.4}$$

[1] 証明の方法は，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数の全体 $C([a, b])$（$X = [a, b]$ の場合の $C(X)$）が上限ノルムに関してバナッハ空間になることを証明する場合と同様である．

【定義 B.3】 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の部分集合 S について，すべての $f,g \in S$ に対して，$f \wedge g, f \vee g \in S$ が成り立つとき，S を**束** (lattice) と呼ぶ．

【補題 B.4】 B が $C_{\mathbb{R}}(X)$ の閉部分代数で $1 \in B$ ならば B は束である．

証明 単純な計算からわかるように，任意の $f,g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ に対して

$$f \vee g = \frac{1}{2}(|f-g| + (f+g)), \quad f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)] \tag{B.5}$$

と表される．したがって，「任意の $f \in B$ に対して，$|f| \in B$」$\cdots(*)$ を示せば十分である．$f = 0$ ならば，これは自明であるから，$f \neq 0$ とすれば，$\tilde{f} := f/\|f\|_\infty \in B$ が定義でき，$\|\tilde{f}\|_\infty = 1$, $f = \|f\|_\infty \tilde{f}$ と書ける．したがって，$\|f\|_\infty = 1$ の場合について $(*)$ を証明すれば十分である．

閉区間 $[0,1]$ 上の多項式の単調増加列 $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ で

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t) = \sqrt{t}, \quad t \in [0,1]$$

を満たすものがあったとしよう (その存在は以下で示す)．このとき，ディニの定理[2]により，この収束は一様である．すなわち，$\|P_n - \sqrt{t}\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立つ．いま，$\|f\|_\infty = 1$ であるから，$|f(x)| \leq 1, \forall x \in X$．そこで，$t = f(x)^2\ (\leq 1)$ とし，$g_n(x) := P_n(f(x)^2)$ とおけば，$\|g_n - |f|\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$．$B$ は 1 を含む代数であるから，$g_n \in B$．したがって，B の閉性により，$|f| \in B$ が結論される．

上の P_n の存在は次のようにして構成的に示される．すなわち，次の漸化式により一意的に定まる多項式 P_n が求めるものである：

$$P_1(t) := 0, \quad P_{n+1}(t) := P_n(t) + \frac{1}{2}[t - P_n(t)^2], \quad n \geq 1,\ t \in [0,1].$$

(証明) まず

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t))\right)$$

---

[2] **【ディニの定理】** 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の単調増加列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ($f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$) が各点 $x \in [a,b]$ ごとに $[a,b]$ 上の連続関数 f に収束するならば (i.e. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$), $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束する：$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

この定理の証明については，たとえば，小松勇作，『解析概論 [I]』(廣川書店，1962) の p.137–138 を参照．

が成立する．明らかに，$\sqrt{t} \geq 0 = P_1(t)$．$\sqrt{t} \geq P_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ とすれば

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t)) \geq 1 - \sqrt{t} \geq 0.$$

したがって，$\sqrt{t} \geq P_{n+1}(t)$．ゆえに数学的帰納法により，$1 \geq \sqrt{t} \geq P_n(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$．これがわかると，数学的帰納法により，$P_n(t) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ も示される．これらの不等式と漸化式により，$P_{n+1}(t) \geq P_n(t) \geq 0$ が結論される．すなわち，$\{P_n\}_n$ は非負多項式の単調増加列である．この関数列は有界であるから，$u(t) := \lim_{n\to\infty} P_n(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$ が存在する．このとき，漸化式により

$$u(t) = u(t) + \frac{1}{2}[t - u(t)^2].$$

したがって，$t = u(t)^2$．ゆえに $u(t) = \sqrt{t}$. ∎

【補題 B.5】 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の部分空間 D が X の点を分離し，1 を含むならば，X の任意の相異なる 2 点 x_1, x_2 と任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x_1) = a, f(x_2) = b$ を満たす関数 $f \in D$ が存在する．

証明 D の分離性により，$g \in D$ で $g(x_1) \neq g(x_2)$ を満たすものが存在する．そこで，X 上の関数 f を

$$f(x) := a + \frac{b-a}{g(x_2) - g(x_1)}(g(x) - g(x_1)), \quad x \in X$$

によって定義すれば，$f \in D$ であり（ここで，$1 \in D$，したがって，$c1 = c \in D$, $\forall c \in \mathbb{R}$ がきく），$f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ が成り立つ． ∎

【定理 B.6】（角谷–クレイン (Krein) の定理） X をコンパクト・ハウスドルフ空間とし，$L \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ を束で次の性質を満たすものとする：(L.1) L は閉部分空間である；(L.2) L は X の点を分離する；(L.3) $1 \in L$．このとき，$L = C_{\mathbb{R}}(X)$.

証明 各 $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g \in L$ で $\|g - f\|_\infty < \varepsilon \cdots (*)$ を満たすものの存在を示せばよい．

いま，各 $x \in X$ に対し

$$g_x \in L,\ g_x(x) = f(x),\ f \leq g_x + \varepsilon \cdots (**)$$

を満たすものがあったとしよう（存在はあとで示す）．$f - g_x$ は連続であり，$f(x) - g_x(x) = 0$ であるから，x の近傍 U_x が存在して，$y \in U_x$ ならば $|f(y) - g_x(y)| < \varepsilon \cdots (\dagger)$ が成り立つ．明らかに $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x$ である．したがって，X のコンパクト性により，有限個の $x_1, \cdots, x_n \in X$ があって $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$．そこで，$g := g_{x_1} \wedge \cdots \wedge g_{x_n}$ とすれば，$g \in L$ である．任意の $y \in X$ に対して，$y \in U_{x_k}$ となる k があるから，$(\dagger)$ より，$g_{x_k}(y) < f(y) + \varepsilon$ である．したがって，$g(y) < f(y) + \varepsilon$．また，任意の $y \in X$ に対して，$(**)$ から

$$g(y) + \varepsilon = \min_{k=1,\cdots,n} \{g_{x_k}(y) + \varepsilon\} \geq f(y)$$

となる．したがって，$|g(y) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall y \in X$ が得られたことになる．ゆえに $(*)$ が成立する．

（g_x の存在）$x \in X$ を任意に固定する．L は補題 B.5 の D に要求される性質を満たすので，任意の $y \in X, y \neq x$ に対して，$f_y \in L$ があって，$f_y(x) = f(x)$, $f_y(y) = f(y)$ が成り立つ．$y = x$ に対しては，$f_x(z) := f(x)1, z \in X$（定値関数）とする．$1 \in L$ であるから，$f_x \in L$ である．f_y の定義と $f - f_y$ の連続性により，各 $y \in X$ に対して，y の近傍 V_y が存在して，$f_y(z) + \varepsilon \geq f(z), z \in V_y$ が成立する．$X \subset \bigcup_{y \in X} V_y$ であり，X はコンパクトであるから，有限個の $y_1, \cdots, y_m \in X$ があって，$X \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ が成り立つ．そこで，$g_x := f_{y_1} \vee \cdots \vee f_{y_m}$ とすれば，$g_x \in L$, $g_x(x) = f(x)$ であり，任意の $z \in X$ に対して，$z \in V_{y_j}$ となる j があるから

$$g_x(z) + \varepsilon \geq f_{y_j}(z) + \varepsilon \geq f(z).$$

したがって，この g_x は $(**)$ を満たす． ∎

定理 B.2 の証明

まず，$1 \in B$ の場合を考える．このとき，補題 B.4 によって，B は束である．さらに，$L = B$ は定理 B.6 の仮定を満たす．したがって，$B = C_{\mathbb{R}}(X)$ が結論される．

次に $1 \notin B$ の場合を考える．この場合，$\hat{B} := \{c + f \mid c \in \mathbb{R}, f \in B\}$ は閉部分代数であり（閉性は自明ではない：$\hat{B} \ni c_n + f_n \to g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ $(n \to \infty)$ のとき，まず，$\{c_n\}_n$ がコーシー列をなすことを示す[3]），$1 \in \hat{B}$, $B \subset \hat{B}$ で

[3] やり方は，単位元をもたない C^* 代数に単位元を追加してできるノルム代数の完備性を証明する場合と同様である（拙著，『量子統計力学の数理』(共立出版，2008）の p.62 を参照）．

ある．明らかに，$\hat{B}$ は X の点を分離する．したがって，前半の結果により，$\hat{B} = C_{\mathbb{R}}(X)$．■

【定理 B.7】（複素ストーン–ヴァイエルシュトラースの定理） X をコンパクト・ハウスドルフ空間とする．B は $C(X)$ の閉部分代数で次の条件を満たすとする：

(B.1) B は X の点を分離する．
(B.2) 任意の $f \in B$ に対して $f^* \in B$ である（f^* は f の複素共役）．

このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) $1 \in B$ ならば $B = C(X)$．
(ii) $1 \notin B$ ならば，$\{\alpha + f \mid \alpha \in \mathbb{C},\ f \in B\} = C(X)$．

証明 任意の $f \in C(X)$ に対して，$f_{\mathrm{re}} := (f + f^*)/2$, $f_{\mathrm{im}} := (f - f^*)/2i$ とすれば，$f_{\mathrm{re}}, f_{\mathrm{im}} \in C_{\mathbb{R}}(X)$ であり，$f = f_{\mathrm{re}} + i f_{\mathrm{im}}$ と表される．したがって，$C(X) = \{f_1 + i f_2 \mid f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}}(X)\}$．$f_{\mathrm{re}} = \mathrm{Re}\, f$, $f_{\mathrm{im}} = \mathrm{Im}\, f$ と記す．$B_{\mathbb{R}} := B \cap C_{\mathbb{R}}(X)$ としよう．(B.2) によって，$f \in B$ ならば $\mathrm{Re}\, f \in B_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Im}\, f \in B_{\mathbb{R}}$ である．したがって，$B = \{f + ig \mid f, g \in B_{\mathbb{R}}\}$ が成り立つ．容易にわかるように，$B_{\mathbb{R}}$ は $C_{\mathbb{R}}(X)$ の閉部分代数である．また，$B_{\mathbb{R}}$ は X の点を分離する（$\because$ (B.1) により，任意の $x, y, x \neq y$ に対して，$f \in B$ で $f(x) \neq f(y)$ を満たすものがある．したがって，$\mathrm{Re}\, f(x) + i\mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y) + i\mathrm{Im}\, f(y)$．これは，$\mathrm{Re}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y)$ または $\mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Im}\, f(y)$ を意味する．$\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in B_{\mathbb{R}}$ であるから，いずれの場合でも，$B_{\mathbb{R}}$ が X の点を分離することを示す）．以上から，$B = B_{\mathbb{R}}$ に対して，定理 B.2 を適用できる．したがって，もし，$1 \in B$ ならば，$1 \in B_{\mathbb{R}}$ であるので，$B_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}}(X)$ となる．ゆえに $B = C(X)$．また，$1 \notin B$ ならば，$\{c + f \mid c \in \mathbb{R}, f \in B_{\mathbb{R}}\} = C_{\mathbb{R}}(X)$．したがって，$C(X) = \{\alpha + f \mid f \in B\}$．■

複素ストーン–ヴァイエルシュトラースの定理の応用を 1 つ述べておく．$\mathbb{R}$ 上の，無限遠で 0 になる複素数値連続関数の全体

$$C_\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\} \tag{B.6}$$

を考える．この集合は，関数の和と複素数倍に関して複素ベクトル空間であり，上限ノルムに関して完備，すなわち，バナッハ空間である[4].

2 個の実変数の複素係数多項式で定数項が 0 であるものの全体を $\mathcal{P}$ とする：

$$\mathcal{P} := \{P \mid P \text{ は } 2 \text{ 変数 } x, y \in \mathbb{R} \text{ の複素多項式で } P(0,0) = 0\} \tag{B.7}$$

各 $P \in \mathcal{P}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_P を

$$f_P(x) := P\big((x+i)^{-1}, (x-i)^{-1}\big), \quad x \in \mathbb{R} \tag{B.8}$$

によって定義し

$$B_{\mathcal{P}} := \{f_P \mid P \in \mathcal{P}\} \tag{B.9}$$

とおく．$B_{\mathcal{P}}$ は，要するに，2 つの関数 $(x+i)^{-1}$ と $(x-i)^{-1}$ の複素係数多項式の全体である．容易にわかるように

$$B_{\mathcal{P}} \subset C_\infty(\mathbb{R}). \tag{B.10}$$

【定理 B.8】 $B_{\mathcal{P}}$ は上限ノルムに関して $C_\infty(\mathbb{R})$ で稠密である．すなわち

$$\bar{B}_{\mathcal{P}} = C_\infty(\mathbb{R}). \tag{B.11}$$

ただし，閉包は上限ノルムに関するそれである．

証明　簡単のため，$B := \bar{B}_{\mathcal{P}}$ とおく．(B.10) と $C_\infty(\mathbb{R})$ の上限ノルムに関する完備性により，$B \subset C_\infty(\mathbb{R}) \cdots (*)$ がただちに導かれる．

$\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ によって $\mathbb{R}$ の 1 点コンパクト化を表す．したがって，$\dot{\mathbb{R}}$ はコンパクト・ハウスドルフ空間である．各 $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ に対して，$\dot{\mathbb{R}}$ 上の関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(\infty) := 0, \quad \tilde{f}(x) := f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{B.12}$$

によって定義すれば，$\tilde{f} \in C(\dot{\mathbb{R}})$ である．そこで

$$B' := \{\tilde{f} \mid f \in B\} \tag{B.13}$$

とおけば，B' は $C(\dot{\mathbb{R}})$ の閉部分代数で $\dot{\mathbb{R}}$ の点を分離する．また，$\big((x+i)^{-1}\big)^* = (x-i)^{-1}$ であるから，$f \in B'$ ならば $f^* \in B'$ が導かれる．$(*)$ により，$1 \notin B'$.

[4] 完備性の証明は，$C([a,b])$ の完備性の証明と同様である．

ゆえに，定理 B.7-(ii) によって，$\{\alpha + f \mid \alpha \in \mathbb{C}, f \in B'\} = C(\dot{\mathbb{R}})$．これは，各 $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ に対して，$g \in B$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して，$\tilde{f} = \alpha + \tilde{g}$ が成り立つことを意味する．特に，$f(x) = \alpha + g(x), x \in \mathbb{R}$．$x \to \infty$ とすれば，$\alpha = 0$ が結論される．したがって，$f = g \in B$．この結果と $(*)$ により，$B = C_\infty(\mathbb{R})$ が得られる． ∎

関連図書

[1] 日合文雄・柳研二郎，『ヒルベルト空間と線形作用素』，牧野書店，1995.

[2] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysi*, Academic Press, 1972. Revised and Enlarged Edition, 1980.

[3] 柴田敏男，『位相解析』，筑摩書房，1970.

[4] 竹ノ内 脩，『トポロジー』，廣川書店，1962.

付録C

ヒルベルト空間上の線形作用素論におけるいくつかの事実

この付録を通して，$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ は複素ヒルベルト空間であるとする．

C.1　線形作用素の和と積のユニタリ変換

A, B を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線形作用素とするとき，その和 $A+B$ と積 AB は次のように定義される（$D(A)$ は A の定義域を表す）：

$$D(A+B) := D(A) \cap D(B), \quad (A+B)\psi := A\psi + B\psi, \quad \psi \in D(A+B), \tag{C.1}$$

$$D(AB) := \{\psi \in D(B) \mid B\psi \in D(A)\}, \quad (AB)\psi := A(B\psi), \quad \psi \in D(AB). \tag{C.2}$$

【命題 C.1】　$U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を任意のユニタリ変換，A, B を $\mathcal{H}$ 上の任意の線形作用素とする．このとき，作用素の等式

$$U(A+B)U^{-1} = UAU^{-1} + UBU^{-1}, \quad U(AB)U^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \tag{C.3}$$

が成り立つ．

C.2 強収束

$\mathcal{H}$ 全体を定義域とする，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への有界線形作用素の全体を $\mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ で表す．特に $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) := \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ とする．

$A_n, A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $n \in \mathbb{N}$ について，すべての $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} A_n\psi = A\psi$$

が成り立つとき，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A に**強収束**するといい，A をその**強極限** (strong limit) と呼ぶ．このことを記号的に $\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ と記す．この定義は，有界作用素のネット $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (Λ は有向集合）に対してもそのまま拡張される．

【命題 C.2】 $A_n, A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $n \in \mathbb{N}$ とし，次の 2 つの条件が満たされているとする：

(i) ある稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ があって，任意の $\psi \in \mathcal{D}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} A_n\psi = A\psi.$$

(ii) 定数 $C > 0$ があって $\|A_n\| \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

このとき

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{C.4}$$

証明　$\psi \in \mathcal{H}$ を任意にとる．$a := \max\{C, \|A\|\}$ とおく．$\mathcal{D}$ の稠密性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対してベクトル $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ があって，$\|\psi_\varepsilon - \psi\| < \varepsilon/3a$ が成り立つ．条件 (i) により，番号 n_0 があって，$n \ge n_0$ ならば

$$\|A_n\psi_\varepsilon - A\psi_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

したがって，3 角不等式により，$n \ge n_0$ ならば

$$\begin{aligned}\|A_n\psi - A\psi\| &\le \|A_n\psi - A_n\psi_\varepsilon\| + \|A_n\psi_\varepsilon - A\psi_\varepsilon\| + \|A\psi_\varepsilon - A\psi\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，題意が成立する．　∎

命題 C.2 の証明と同様の考え方による証明方法（稠密な部分集合における情報から全集合における情報を引き出す方法の１つ）は，通常，**$\varepsilon/3$ 論法**と呼ばれ，解析学全般にわたって有用な論法の１つである．

【命題 C.3】 $T_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $n \geq 1$, $\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ とする．このとき，$\mathcal{H}$ の任意のコンパクト部分集合 F に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\psi\in F} \|T_n\psi\| = 0. \tag{C.5}$$

証明 仮定により，各 $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，$\sup_{n\geq 1} \|T_n\psi\| < \infty$．したがって，一様有界性の原理により，$C := \sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$．ゆえに $\|T_n\psi\| \leq C\|\psi\|, \forall\psi \in \mathcal{H}$．$F$ はコンパクトであるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 $N_0 = N_0(\varepsilon)$ とベクトル $\psi_j \in F$ $(j = 1, \cdots, N_0)$ があって，$F \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} U_\varepsilon(\psi_j) \cdots (*)$ が成立する．ただし，$U_\varepsilon(\psi_j) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|\psi - \psi_j\| < \varepsilon\}$（$\psi_j$ の ε 近傍）である．各 j に対して，仮定により，自然数 n_j があって，$n \geq n_j$ ならば $\|T_n\psi_j\| < \varepsilon$．したがって，$n_0 := \max_{j=1,\cdots,N_0} n_j$ とすれば，$n \geq n_0$ に対して $\|T_n\psi_j\| < \varepsilon$ $(j = 1, \cdots, N_0)$ が成り立つ．任意の $\psi \in F$ に対して，$(*)$ によって，ある j があって，$\|\psi_j - \psi\| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，$n \geq n_0$ ならば

$$\|T_n\psi\| \leq \|T_n(\psi - \psi_j)\| + \|T_n\psi_j\| < C\|\psi - \psi_j\| + \varepsilon < (C+1)\varepsilon.$$

したがって，$\sup_{\psi\in F} \|T_n\psi\| \leq (C+1)\varepsilon, \forall n \geq n_0$．ゆえに (C.5) が成立する．∎

C.3 作用素解析と強可換な自己共役作用素

A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，そのスペクトル測度を E_A とする．このとき，任意のボレル可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，次の性質を有する，$\mathcal{H}$ 上の作用素 $f(A)$ がただ１つ存在する：

$$D(f(A)) = \left\{\psi \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 < \infty\right\}, \tag{C.6}$$

$$\langle\phi, f(A)\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\langle\phi, E_A(\lambda)\psi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in D(f(A)). \tag{C.7}$$

【定理 C.4】(作用素解析のユニタリ共変性)　$U:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ をユニタリ変換（作用素）とする．このとき，任意のボレル可測関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

$$Uf(A)U^{-1}=f(UAU^{-1}) \tag{C.8}$$

が成り立つ．

$\mathcal{H}$ 上の 2 つの自己共役作用素 A,B は，それらのスペクトル測度が可換であるとき（i.e. 任意の 1 次元ボレル集合 $J,K\subset\mathbb{R}$ に対して $E_A(J)E_B(K)=E_B(K)E_A(J)$ が成立するとき），A と B は**強可換** (strongly commuting) であるという．

✱ 注意 C.5　A,B が強可換ならば，それらは通常の意味で可換，すなわち，$AB\psi=BA\psi$, $\forall\psi\in D(AB)\cap D(BA)$ が成立する．だが，**この逆は一般には成立しない**．この点は注意されたい．

A,B が有界な自己共役作用素ならば，強可換性と通常の意味での可換性は同値である．

強可換性に関する判定条件は次の定理で与えられる[1]：

【定理 C.6】　A,B を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，次の条件 (i)〜(iii) は互いに同値である：

(i) A と B は強可換である．
(ii) 任意の $s,t\in\mathbb{R}$ に対して，$e^{itA}\,e^{isB}=e^{isB}\,e^{itA}$.
(iii) 任意の $z,w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して

$$(A-z)^{-1}(B-w)^{-1}=(B-w)^{-1}(A-z)^{-1}.$$

$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $A_1,\cdots,A_n$ の組 $\mathbf{A}=(A_1,\cdots,A_n)$ は，$i,j=1,\cdots,n$ に対して，A_i と A_j が強可換であるとき，**強可換**であるという．この場合，n 次元スペクトル測度 $E_{\mathbf{A}}$ で

$$E_{\mathbf{A}}(B_1\times\cdots\times B_n)=E_{A_1}(B_1)\cdots E_{A_n}(B_n),\quad B_j\in\mathfrak{B}^1,\ j=1,\cdots,n$$

[1] 証明については，新井朝雄・江沢 洋,『量子力学の数学的構造 II』(朝倉書店，1999) の定理 3.13 を参照．

を満たすものがただ1つ存在する．$E_{\mathbf{A}}$ は $A_1, \cdots, A_n$ の**結合スペクトル測度**と呼ばれる．この場合

$$\langle \phi, A_j \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_j \, d\langle \phi, E_{\mathbf{A}}(\lambda)\psi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in D(A_j) \tag{C.9}$$

が成り立つ．

任意のボレル可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して，作用素 $f(A_1, \cdots, A_n)$ が $E_{\mathbf{A}}$ に関する作用素解析を通して定義される：

$$D(f(A_1, \cdots, A_n)) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda)|^2 \, d\|E_{\mathbf{A}}(\lambda)\psi\|^2 < \infty \right\}, \tag{C.10}$$

$$\langle \phi, f(A_1, \cdots, A_n)\psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda) \, d\langle \phi, E_{\mathbf{A}}(\lambda)\psi \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in D(f(A_1, \cdots, A_n)). \tag{C.11}$$

一般に，$\mathbb{R}^d$ 上の $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 値関数 $B : \mathbb{R}^d \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}); x \mapsto B(x) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が強連続で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|B(x)\| \, dx < \infty \tag{C.12}$$

を満たすとき，任意の $R_j > 0$ $(j = 1, \cdots, d)$ と $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，強収束の意味でリーマン積分

$$I_{R_1, \cdots, R_d}(B)\psi := \int_{[-R_1, R_1] \times \cdots \times [-R_d, R_d]} B(x)\psi \, dx$$

は存在し

$$\|I_{R_1, \cdots, R_d}(B)\psi\| \le \left(\int_{[-R_1, R_1] \times \cdots \times [-R_d, R_d]} \|B(x)\| \, dx \right) \|\psi\|, \quad \psi \in \mathcal{H}$$

が成り立つことがわかる（証明は通常の連続関数に関するリーマン積分の場合と同様）．そこで

$$\text{s-}\int_{[-R_1, R1] \times \cdots \times [-R_d, R_d]} B(x) \, dx := I_{R_1, \cdots, R_d}(B)$$

という記号を導入し，B に関する $[-R_1, R_1] \times \cdots \times [-R_d, R_d]$ 上での**強リーマン積分** (strong Riemann integral) と呼ぶ．さらに，条件 (C.12) によって，$I_{R_1, \cdots, R_d}(B)$ の強極限

$$\text{s-}\int_{\mathbb{R}^d} B(x) \, dx := \text{s-}\lim_{R_1, \cdots, R_d \to \infty} I_{R_1, \cdots, R_d}(B) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

も存在することが示される．これを B に関する $\mathbb{R}^d$ **上での強リーマン積分**という．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の空間とする．

【定理 C.7】 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f(A_1, \cdots, A_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\ \text{s-}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j} \hat{f}(k)\, dk. \tag{C.13}$$

ただし，$\hat{f}$ は f のフーリエ変換を表す．

証明 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は有界であるから，$f(A_1, \cdots, A_n) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ である．したがって，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \psi, f(A_1, \cdots, A_n)\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda)\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j k_j} \hat{f}(k)\, dk \right) d\|E_A(\lambda)\psi\|^2.\end{aligned}$$

ここで，$\left|e^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j k_j} \hat{f}(k)\right| = \left|\hat{f}(k)\right|$ であり，これは $dk \otimes d\|E_A(\lambda)\psi\|^2$ について可積分であるから，フビニの定理により，積分の順序交換ができる．その結果

$$\langle \psi, f(A_1, \cdots, A_n)\psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \psi, e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j}\psi \right\rangle \hat{f}(k)\, dk.$$

一方

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\| e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j} \hat{f}(k) \right\| dk = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(k)\right| dk < \infty$$

であるから，$B(k) = e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j} \hat{f}(k)$ は (C.12) を満たす．したがって，強リーマン積分 s-$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j} \hat{f}(k)\, dk$ は存在する．ゆえに

$$\langle \psi, f(A_1, \cdots, A_n)\psi \rangle = \left\langle \psi, \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\ \text{s-}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j A_j} \hat{f}(k)\, dk \right)\psi \right\rangle.$$

これは (C.13) を意味する．∎

【定理 C.8】 A, B を強可換な自己共役作用素の対とし，$A \geq 0$, $B \geq 0$ とする．このとき

$$\|A\psi\|^2 + \|B\psi\|^2 \leq \|(A+B)\psi\|^2, \quad \psi \in D(A+B). \tag{C.14}$$

が成り立つ.

証明 A と B の結合スペクトル測度を E とすれば，$\operatorname{supp} E \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$ であるので，任意の $\psi \in D(A+B)$ に対して

$$\begin{aligned} \|(A+B)\psi\|^2 &= \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} (\lambda+\mu)^2 \, d\|E(\lambda,\mu)\psi\|^2 \\ &\geq \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} (\lambda^2+\mu^2) \, d\|E(\lambda,\mu)\psi\|^2 \\ &= \|A\psi\|^2 + \|B\psi\|^2. \end{aligned}$$

したがって，(C.14) が成立する. ∎

C.4 自己共役作用素に関するいくつかの事実

【定理 C.9】 任意の自己共役作用素 A に対して

$$\left\|e^{iA}\psi - \psi\right\| \leq \|A\psi\|, \quad \psi \in D(A). \tag{C.15}$$

証明 不等式 (5.55) を用いて次のように進めばよい：

$$\begin{aligned} \left\|e^{iA}\psi - \psi\right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |e^{i\lambda} - 1|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2. \end{aligned}$$

∎

【定理 C.10】 A を非負の自己共役作用素とする.

(i) $D \subset D(A)$ が A の芯ならば，任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して，D は A^α の芯である.

(ii) 各 $\beta > 0$ と任意の $c \geq 0$ に対して

$$\|A^\beta\psi\| \leq \|(A+c)^\beta\psi\|, \quad \psi \in D(A^\beta). \tag{C.16}$$

【定理 C.11】　A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，$a \in \mathbb{R}$ を定数とする．$\psi_0 \in D(A)$ を任意にとる．このとき，強微分可能な写像 $\psi : \mathbb{R} \to D(A)$ に関する強微分方程式

$$\psi'(t) = (at + iA)\,\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0$$

の解はただ 1 つ存在し（$\psi'(t) := d\psi(t)/dt$ は，t に関する $\psi(t)$ の強微分を表す）

$$\psi(t) = e^{at^2/2}\, e^{itA}\psi_0 \tag{C.17}$$

が成り立つ．

証明　$\phi(t) := e^{-at^2/2}\, e^{-itA}\psi(t)$ とおけば，ϕ は強微分可能であり $\phi'(t) = 0$ となる．したがって，$\phi(t) = \phi(0) = \psi_0$．ゆえに $e^{-at^2/2}\, e^{-itA}\psi(t) = \psi_0$．よって $\psi(t)$ は一意的に定まり，(C.17) が成り立つ．　■

【命題 C.12】　A は非負の自己共役作用素で単射であるとする．このとき任意の $\alpha > 0, \beta > 0$ に対して，$D(A^{-\alpha}) \cap D(A^\beta) \subset D(A^s), \forall s \in (-\alpha, \beta)$ であり

$$\|A^s\psi\| \le \|A^{-\alpha}\psi\| + \|A^\beta\psi\|, \quad \psi \in D(A^{-\alpha}) \cap D(A^\beta) \tag{C.18}$$

が成り立つ．

証明　A のスペクトル測度を E_A とし，$\psi \in D(A^{-\alpha}) \cap D(A^\beta)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \lambda^{2s}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 &= \int_{[0,1]} \lambda^{2s}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 + \int_{(1,\infty)} \lambda^{2s}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &\le \int_{[0,1]} \lambda^{-2\alpha}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 + \int_{(1,\infty)} \lambda^{2\beta}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &\le \|A^{-\alpha}\psi\|^2 + \|A^\beta\psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，題意が成立する．　■

$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A とベクトル $f \in \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ について，ある $r > 0$ があって，$\sum_{n=0}^\infty \|A^n f\| r^n/n!$ が収束するとき，f を A の**解析ベクトル** (analytic vector) という．

【定理 C.13】（解析ベクトル定理）　A を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし，$\mathcal{H}$ で稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset D(A)$ が存在して次の条件が満たされるとする：(i) A は $\mathcal{D}$ を不変

にする：$f \in \mathcal{D} \Longrightarrow Af \in \mathcal{D}$；(ii) $\mathcal{D}$ の任意の元は A の解析ベクトルである．このとき，A は $\mathcal{D}$ 上で本質的に自己共役である．

証明　拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の系 2.42 を参照[2]．■

C.5　相対有界性と自己共役性

A, B を $\mathcal{H}$ 上の線形作用素とする．$D(A) \subset D(B)$ および定数 $a \geq 0$, $b \geq 0$ があって

$$\|B\psi\| \leq a\|A\psi\| + b\|\psi\|, \quad \psi \in D(A) \tag{C.19}$$

が成り立つとき，B は A に関して**相対的に有界**であるといい，a をその 1 つの**相対限界** (relative bound) と呼ぶ．相対限界 a がいくらでも小さくとれるとき (b は a に応じて変わりうる)，B は A に関して**無限小** (infinitesimally small) であるいう．

【命題 C.14】　A, B を $\mathcal{H}$ 上の線形作用素とし，$0 \leq a < 1$ を満たす定数 a があって，(C.19) が成り立つとする．このとき

$$\|A\psi\| \leq \frac{1}{1-a}\|(A+B)\psi\| + \frac{b}{1-a}\|\psi\| \tag{C.20}$$

が成り立つ．

証明　3 角不等式により，任意の $\psi \in D(A)$ に対して

$$\begin{aligned}\|A\psi\| &\leq \|(A+B)\psi\| + \|B\psi\| \\ &\leq \|(A+B)\psi\| + a\|A\psi\| + b\|\psi\|.\end{aligned}$$

したがって，$(1-a)\|A\psi\| \leq \|(A+B)\psi\| + b\|\psi\|$．ゆえに (C.20) が得られる．■

【定理 C.15】(加藤–レリッヒの定理[3])　A, B をそれぞれ，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素，対称作用素とし，$D(A) \subset D(B)$ かつ定数 $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ があって

$$\|B\psi\| \leq a\|A\psi\| + b\|\psi\|, \quad \psi \in D(A) \tag{C.21}$$

[2] ここで述べた定理では，仮定の条件を若干強くしてある．
[3] 証明については，拙著，『量子現象の数理』(朝倉書店，2006) の第 2 章を参照．

が成り立っているとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) $A+B$ は自己共役であり，A の任意の芯は $A+B$ の芯である．

(ii) A が下に有界ならば，$A+B$ も下に有界である．

【定理 C.16】 A, B は定理 C.15 の仮定を満たすものとする (したがって，$A+B$ は自己共役)．加えて，$A \geq 0$ としよう．このとき，任意の $t>0$ と $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，$e^{-t(A+B)}\psi \in D(A)$ であり，$\psi(t) := A\, e^{-t(A+B)}\psi$ は $t \in (0,\infty)$ について強連続である．特に，$\psi \in D(A)$ ならば $\psi(t)$ は $t=0$ においても強連続である．

証明　いまの仮定のもとでは，$A+B$ は下に有界であるから，作用素解析により，$e^{-t(A+B)}\psi \in D(A+B)$ である．他方，$D(A+B)=D(A)$ であるから，$e^{-t(A+B)}\psi \in D(A)$ となる．仮定により，(C.20) が成立する．したがって，$t+h>0,\ t>0$ として

$$\|\psi(t+h)-\psi(t)\| \leq \frac{1}{1-a}\left\|(A+B)e^{-t(A+B)}\left(e^{-h(A+B)}-1\right)\psi\right\| + \frac{b}{1-a}\left\|e^{-t(A+B)}\left(e^{-h(A+B)}-1\right)\psi\right\|$$

作用素解析により，$(A+B)\, e^{-t(A+B)}$ は有界であり，$\lim_{h\to 0}\left\|\left(e^{-h(A+B)}-1\right)\psi\right\| = 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\|\psi(t+h)-\psi(t)\| = 0$$

となる．したがって，$\psi(t)$ は $t>0$ に関して強連続である．$t=0$ の場合，上の不等式は $\psi \in D(A)$ ならば成立する．ゆえに，この場合，$\psi(t)$ は $t=0$ でも連続である．　∎

C.6　強レゾルヴェント収束に関する基本的な定理

$A_n, A\ (n \in \mathbb{N})$ を自己共役作用素とする．したがって，$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ は A_n, A のレゾルヴェント集合に属する．任意の $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}(A_n - z)^{-1} = (A-z)^{-1} \tag{C.22}$$

が成り立つとき，$\{A_n\}_n$ は A に**強レゾルヴェント収束**するという．

次の補題に述べる公式は有用である：

【補題 C.17】 任意の $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A^n - B^n = \sum_{j=0}^{n-1} B^j (A-B) A^{n-j-1}. \tag{C.23}$$

証明 n に関する帰納法による．$n = 1$ の場合の (C.23) は明らかに成立する．$n = k \in \mathbb{N}$ のときの (C.23) が成立するとしよう．このとき

$$\begin{aligned} A^{k+1} - B^{k+1} &= (A-B)A^k + B(A^k - B^k) \\ &= (A-B)A^k + \sum_{j=0}^{k-1} B^{j+1}(A-B)A^{k-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} B^j (A-B) A^{(k+1)-j-1}. \end{aligned}$$

したがって，(C.23) は $n = k+1$ のときも成立する． ■

【定理 C.18】 A_n, A $(n \in \mathbb{N})$ を自己共役作用素とし，$\{A_n\}_n$ は A に強レゾルヴェント収束しているとする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 f に対して

$$\operatorname{s-}\lim_{n\to\infty} f(A_n) = f(A). \tag{C.24}$$

証明 付録 B の定理 B.8 によって，任意の $f \in C_\infty(\mathbb{R})$—(B.6) を参照—と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，2 変数の多項式 $P(s,t)$ で

$$\|f - P((x+i)^{-1}, (x-i)^{-1})\|_\infty < \varepsilon$$

を満たすものがとれる．作用素解析により

$$\|f(A_n) - P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\| < \varepsilon,$$

$$\|f(A) - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\| < \varepsilon.$$

仮定により

$$\lim_{n\to\infty} \|P((A_n+i)^{-1}, (A_n+i)^{-1})\psi - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\psi\| = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

を示すことができる．実際，$k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}
&(A_n + i)^{-k}(A_n - i)^{-\ell} - (A+i)^{-k}(A-i)^{-\ell} \\
&= (A_n + i)^{-k}\{(A_n - i)^{-\ell} - (A-i)^{-\ell}\} \\
&\quad + \{(A_n + i)^{-k} - (A+i)^{-k}\}(A-i)^{-\ell}
\end{aligned}$$

と変形し，補題 C.17 を応用すればよい．したがって，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，3 角不等式により

$$\begin{aligned}
&\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \\
&\le \|f(A_n)\psi - P((A_n+i)^{-1}, (A_n - i)^{-1})\psi\| \\
&\quad + \|P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\psi - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\psi\| \\
&\quad + \|f(A)\psi - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\psi\| \\
&\le 2\varepsilon\|\psi\| \\
&\quad + \|P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\psi - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\psi\|.
\end{aligned}$$

これは

$$\limsup_{n\to\infty} \|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \le 2\varepsilon\|\psi\|$$

を意味する．$\varepsilon > 0$ は任意であったから

$$\lim_{n\to\infty} \|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| = 0.$$

ゆえに (C.24) が成立する．

次に $f \in C(\mathbb{R})$ の場合を考える．$k \in \mathbb{N}$ に対して，$g_k(x) := e^{-x^2/k}$, $x \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$fg_k \in C_\infty(\mathbb{R})$ であるから，前段の結果より

$$\lim_{n\to\infty} \|f(A_n)g_k(A_n)\psi - f(A)g_k(A)\psi\| = 0, \quad \forall\psi \in \mathcal{H}. \tag{C.25}$$

一方，3 角不等式により，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \le\ &\|f(A_n)\psi - f(A_n)g_k(A_n)\psi\| \\
&+ \|f(A_n)g_k(A_n)\psi - f(A)g_k(A)\psi\| \\
&+ \|f(A)g_k(A)\psi - f(A)\psi\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f(A_n)\|\|\psi - g_k(A_n)\psi\| \\
&\quad + \|f(A_n)g_k(A_n) - f(A)g_k(A)\psi\| \\
&\quad + \|f(A)\|\|g_k(A)\psi - \psi\| \\
&\leq \|f\|_\infty\|\psi - g_k(A_n)\psi\| \\
&\quad + \|f(A_n)g_k(A_n) - f(A)g_k(A)\psi\| \\
&\quad + \|f\|_\infty\|g_k(A)\psi - \psi\| \\
&\leq \|f\|_\infty(\|\psi - g_k(A)\psi\| + \|g_k(A)\psi - g_k(A_n)\psi\|) \\
&\quad + \|f(A_n)g_k(A_n) - f(A)g_k(A)\psi\| \\
&\quad + \|f\|_\infty\|g_k(A)\psi - \psi\|
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leq 2\|f\|_\infty\|g_k(A)\psi - \psi\| \\
+ \|f\|_\infty\|g_k(A)\psi - g_k(A_n)\psi\| \\
+ \|f(A_n)g_k(A_n) - f(A)g_k(A)\psi\|.
\end{aligned}
$$

$|g_k(x)| \leq 1$, $g_k(x) \to 1$ $(k \to \infty)$ であるから，作用素解析により

$$
\lim_{k\to\infty} \|g_k(A)\psi - \psi\| = 0.
$$

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$k_0 \in \mathbb{N}$ があって $\|g_{k_0}(A)\psi - \psi\| < \varepsilon$ が成り立つ．$g_k \in C_\infty(\mathbb{R})$ であるから，前段の結果により，$n_1 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq n_1$ ならば，$\|g_{k_0}(A_n)\psi - g_{k_0}(A)\psi\| < \varepsilon$ が成り立つ．(C.25) は，$n_2 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq n_2$ ならば，$\|f(A_n)g_{k_0}(A_n)\psi - f(A)g_{k_0}(A)\psi\| < \varepsilon$ を意味する．そこで，$N_0 := \max\{n_1, n_2\}$ とすれば，$n \geq N_0$ 対して

$$
\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leq (3\|f\|_\infty + 1)\varepsilon
$$

したがって，(C.24) が成立する． ∎

【系 C.19】 A_n, A $(n \in \mathbb{N})$ を自己共役作用素とし，$\{A_n\}_n$ は A に強レゾルヴェント収束しているとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ 対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{itA_n} = e^{itA}$.

(ii) A_n, A が下に有界で，$A_n \geq cI$（$c \in \mathbb{R}$ は n によらない定数）ならば，任意の $\beta > 0$ に対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{-\beta A_n} = e^{-\beta A}$.

証明　(i) 定理 C.18 で $f(x) = e^{itx}$ の場合である．

(ii) $A \geq aI$ $(a \in \mathbb{R})$, $M := \min\{a, c\}$ とし，$\beta > 0$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_β を $x \leq M$ ならば $f_\beta(x) := e^{-\beta M}$, $x > M$ ならば $f_\beta(x) := e^{-\beta x}$ と定義すれば，f_β は $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数であり，作用素解析により，$f_\beta(A_n) = e^{-\beta A_n}$, $f_\beta(A) = e^{-\beta A}$ が成り立つ．ゆえに定理 C.18 を $f = f_\beta$ の場合に応用すれば求める結果を得る．∎

【定理 C.20】　A_n, A $(n \in \mathbb{N})$ を自己共役作用素とする．稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ で次の条件を満たすものがあるとする：

(D.1) $\mathcal{D}$ は A の芯である．

(D.2) $\mathcal{D} \subset \bigcap_{n=1}^\infty D(A_n)$ であり，$\lim_{n\to\infty} A_n\phi = A\phi, \forall\phi \in \mathcal{D}$ が成り立つ．

このとき，次の (i)〜(iii) が成立する：

(i) $\{A_n\}_n$ は A に強レゾルヴェント収束する．すなわち，任意の $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} (A_n - z)^{-1} = (A - z)^{-1}. \tag{C.26}$$

(ii) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{itA_n} = e^{itA}$.

(iii) A_n, A が下に有界で $A_n \geq cI$（$c \in \mathbb{R}$ は n によらない定数）ならば，すべての $\beta > 0$ に対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{-\beta A_n} = e^{-\beta A}$.

証明　(i) $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\psi = (A - z)\phi$, $\phi \in \mathcal{D}$ とする．このとき

$$\left((A_n - z)^{-1} - (A - z)^{-1}\right)\psi = (A_n - z)^{-1}(A - A_n)\phi.$$

したがって

$$\left\|\left((A_n - z)^{-1} - (A - z)^{-1}\right)\psi\right\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}\|(A - A_n)\phi\| \to 0\ (n \to \infty).$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - z)^{-1}\psi = (A-z)^{-1}\psi. \tag{C.27}$$

$\mathcal{D}$ は A の芯であるから，$\{(A-z)\phi \mid \phi \in \mathcal{D}\}$ は $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間である．これと $\|(A_n - z)^{-1}\| \le |\mathrm{Im}\, z|^{-1}$ (n に関する一様有界性) を用いると，$\varepsilon/3$ 論法により，(C.27) はすべての $\psi \in \mathcal{H}$ へと拡張される．

(ii), (iii) は (i) と系 C.19 による．■

C.7　近似定理

一般に，閉線形作用素 T に対して

$$\langle\psi,\phi\rangle_T := \langle\psi,\phi\rangle + \langle T\psi, T\phi\rangle\,,\ \psi,\phi \in D(T) \tag{C.28}$$

とすれば，$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ は $D(T)$ の内積であり，この内積に関して，$D(T)$ はヒルベルト空間になる．このヒルベルト空間を $\mathcal{H}_T$ とする．

【補題 C.21】 A, B を $\mathcal{H}$ 上の閉線形作用素とする．このとき，$A+B$ が閉作用素であるための必要十分条件は，定数 $C>0$ があって

$$\|A\psi\| + \|B\psi\| \le C(\|(A+B)\psi\| + \|\psi\|), \quad \psi \in D(A+B) \tag{C.29}$$

が成り立つことである．

証明　(必要性) $A+B$ は閉作用素であるとしよう．このとき，写像 $J : \mathcal{H}_{A+B} \to \mathcal{H}_A$ を $J\psi := \psi$, $\psi \in \mathcal{H}_{A+B}$ によって定義すれば，J は線形であり，閉であることがわかる．したがって，閉グラフ定理により，J は有界である．すなわち，定数 $C_1 > 0$ があって，$\|J\psi\|_A \le C_1\|\psi\|_{A+B}, \psi \in D(A+B)$. $\|J\psi\|_A \ge \|A\psi\|$ であるから，$\|A\psi\| \le C_1\|\psi\|_{A+B}, \psi \in D(A+B)$ が成り立つ．A のかわりに B を考えることにより，定数 $C_2 > 0$ が存在して $\|B\psi\| \le C_2\|\psi\|_{A+B}, \psi \in D(A+B)$ となる．したがって，$C = C_1 + C_2$ とすれば，(C.29) が成立する．

(十分性) 容易である．■

【定理 C.22】 A, B はともに $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で，$A+B$ は $D(A)\cap D(B)$ 上で本質的に自己共役であるとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i)（**トロッターの積公式**）任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{it\overline{(A+B)}} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{itA/n}\, e^{itB/n}\right)^n , \tag{C.30}$$

(ii)（**トロッター–加藤の積公式**）A, B がともに下に有界ならば，任意の $t > 0$ に対して

$$e^{-t\overline{(A+B)}} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}\, e^{-tB/n}\right)^n . \tag{C.31}$$

証明　(i) $A+B$ が自己共役の場合についてのみ証明する[4]．$t \neq 0$ を任意に固定する．$S_n := e^{itA/n}\, e^{itB/n}$, $T_n := e^{it(A+B)/n}$ とおくと

$$e^{it(A+B)} - (e^{itA/n}\, e^{itB/n})^n = T_n^n - S_n^n$$

と書ける．公式 (C.23) によって

$$T_n^n - S_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} S_n^j (T_n - S_n) T_n^{n-j-1}.$$

したがって，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|e^{it(A+B)}\psi - (e^{itA/n}\, e^{itB/n})^n \psi\| \le \sum_{j=0}^{n-1} \|(S_n - T_n) T_n^{n-j-1}\psi\|.$$

これと $T_n^{n-j-1} = e^{it(n-j-1)(A+B)/n}$, $0 \le t(n-j-1)/n < t$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ に注意すれば

$$\left\|e^{it(A+B)}\psi - (e^{itA/n}\, e^{itB/n})^n \psi\right\| \le \sup_{0\le s\le t} \left\|n(S_n - T_n)\, e^{is(A+B)}\psi\right\|. \tag{C.32}$$

ところで, $W(s) := e^{isA}\, e^{isB} - e^{is(A+B)}$, $s \in \mathbb{R}$ とすれば, 任意の $\phi \in D(A+B)$ に対して

$$\frac{W(s)\phi}{s} = e^{isA}\left(\frac{e^{isB}\phi - \phi}{s} - iB\phi\right) + \frac{e^{isA}\phi - \phi}{s} - iA\phi$$

[4] より一般の場合については，P. Chernoff, Note on product formulas for operator semi-groups, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 238–242 または E. Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows* (Princeton University Press, 1970) の第 8 章（http://www.math.princeton.edu/ nelson/books/flows.pdf）を参照されたい．後者には，鮮やかな証明が見られる．

$$+\left(i(A+B)\phi-\frac{e^{is(A+B)}\phi-\phi}{s}\right)+(e^{isA}-1)iB\phi. \quad \text{(C.33)}$$

したがって，定理 C.9 によって

$$\|W(s)\phi/s\|\le 2\|B\phi\|+\|A\phi\|+2\|(A+B)\phi\|+2\|B\phi\|$$

これと補題 C.21 によって，定数 $C>0$ があって

$$\|W(s)\phi/s\|\le C\|\phi\|_{A+B}, \quad \phi\in\mathcal{H}_{A+B}$$

となる．ゆえに，$W(s)/s$ は $\mathcal{H}_{A+B}$ から $\mathcal{H}$ への有界作用素である．

(C.33) の右辺のそれぞれの項は $s\to 0$ とするとき，0 に収束する．したがって，$\lim_{s\to 0}W(s)\phi/s=0$．ゆえに

$$n(S_n-T_n)\phi=t\frac{W(t/n)\phi}{t/n}\to 0 \quad (n\to\infty). \quad \text{(C.34)}$$

したがって，命題 C.3 によって，(C.34) の収束は，$\mathcal{H}_{A+B}$ の任意のコンパクト集合上で一様である．

作用素解析により，任意の $\phi\in D(A+B)$ と $s\in\mathbb{R}$ に対して，$e^{is(A+B)}\phi\in D(A+B)$ である．したがって，ϕ を固定して，写像 $u:[0,t]\to\mathcal{H}_{A+B}$ を $u(s):=e^{is(A+B)}\phi$ によって定義できる．このとき，作用素解析により，$u(s)$ は s について強連続であることがわかる．したがって，u は強連続写像である．この事実と $[0,t]$ のコンパクト性により，u の値域 $\left\{e^{is(A+B)}\phi \mid s\in[0,t]\right\}$ は $\mathcal{H}_{A+B}$ のコンパクト集合である．ゆえに前段の結果により，$\sup_{s\in[0,t]}\left\|n(S_n-T_n)\,e^{is(A+B)}\phi\right\|\to 0$ $(n\to\infty)$．よって，(C.32) により，

$$e^{it(A+B)}\phi=\lim_{n\to\infty}\left(e^{itA/n}\,e^{itB/n}\right)^n\phi$$

が得られる．$D(A+B)$ は $\mathcal{H}$ で稠密であり，$\left\|e^{itA/n}\,e^{itB/n}\right\|=1$ であるから，命題 C.2 によって, (C.30) が得られる．

(ii) (i) の議論で A,B をそれぞれ，iA, iB に置き換えて行えばよい．　■

C.8　トレース型作用素とヒルベルト–シュミット型作用素

この節では，表題の作用素の定義と基本的な性質を採録する．証明なしの言明については，拙著，『量子統計力学の数理』(共立出版，2008) の第 1 章や加

藤敏夫,『位相解析』(共立出版, 1967) の §49 (この本は, 関数解析学の入門書として, たいへんわかりやすく丁寧に書かれた名著である) や日合文雄・柳研二郎,『ヒルベルト空間と線形作用素』(牧野書店, 1995) の第 4 章を参照されたい.

C.8.1　トレース型作用素

$\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間とし, $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とする.

まず, T が非負作用素の場合, すなわち, $T \geq 0$ の場合を考える. したがって, 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して, $\langle \psi, T\psi \rangle \geq 0$. ゆえに $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 (CONS; complete orthonormal system) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\operatorname{Tr} T := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle \tag{C.35}$$

という非負の実数または $+\infty$ が定まる. $\operatorname{Tr} T$ は $\mathcal{H}$ の CONS の取り方によらないことが示される. そこで, $\operatorname{Tr} T < \infty$ のとき, T を**トレース型作用素**と呼ぶ. この場合,「T はトレース型である」といういい方もする.

次に, 一般の $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の場合には, T の絶対値 $|T| := (T^*T)^{1/2} \geq 0$ がトレース型ならば, T は**トレース型**であるという. この場合

$$\operatorname{Tr} T := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle \tag{C.36}$$

は絶対収束し, その値は CONS$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方によらない. $\operatorname{Tr} T$ を T の**トレース**または**シュプール** (Spur ; ドイツ語) あるいは**跡**という.

トレース型作用素 T に対して

$$\|T\|_1 := \operatorname{Tr} |T| = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, |T| e_n \rangle \tag{C.37}$$

を T の**トレースノルム**という. さらに

$$|\operatorname{Tr} T| \leq \|T\|_1 \tag{C.38}$$

が成り立つ.

【定理 C.23】 T をトレース型作用素とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する：

(i) 任意の $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対して，TS, ST はトレース型であり

$$\|ST\|_1 \leq \|T\|_1 \|S\|, \quad \|TS\|_1 \leq \|T\|_1 \|S\|, \tag{C.39}$$

$$|\mathrm{Tr}\,(ST)| \leq \|T\|_1 \|S\|, \quad \|\mathrm{Tr}\,(TS)\| \leq \|T\|_1 \|S\| \tag{C.40}$$

が成り立つ．

(ii) T^* はトレース型であり，$\|T^*\|_1 = \|T\|_1$．

(iii) T はコンパクトである．

C.8.2 ヒルベルト−シュミット型作用素

$\mathcal{K}$ を可分なヒルベルト空間とし，$T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ とする．このとき，T^*T は $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素である．T^*T がトレース型であるとき，T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**ヒルベルト−シュミット型作用素**という．この場合

$$\|T\|_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}\,(T^*T)} \tag{C.41}$$

を T の**ヒルベルト−シュミットノルム**という．なお，$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ の場合，T を $\mathcal{H}$ 上のヒルベルト−シュミット型作用素と呼ぶ．

T がヒルベルト−シュミット型ならば，定義から明らかなように

$$\|T\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \tag{C.42}$$

が成り立つ．ここで，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の任意の CONS でよい．逆に，ある CONS$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$ ならば T はヒルベルト−シュミット型である．

【定理 C.24】 $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ がトレース型ならば，T は $\mathcal{H}$ 上のヒルベルト−シュミット型作用素であり，$\|T\|_2 \leq \|T\|_1$ が成り立つ．

【定理 C.25】 $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ をヒルベルト−シュミット型とすると，次の (i)〜(iii) が成り立つ：

(i) T はコンパクトである．

(ii) $T^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ もヒルベルト–シュミット型であり $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ が成り立つ．

(iii) $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}')$, $R \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}',\mathcal{H})$（$\mathcal{H}',\mathcal{K}'$ はヒルベルト空間）ならば ST, TR はヒルベルト–シュミット型作用素であり，$\|ST\|_2 \le \|S\|\|T\|_2$, $\|TR\|_2 \le \|T\|_2\|R\|$ が成り立つ．

【定理 C.26】 T, S が $\mathcal{H}$ 上のヒルベルト–シュミット型作用素ならば，次の (i), (ii) が成立する．

(i) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha T + \beta S$ はヒルベルト–シュミット型である．

(ii) TS はトレース型であり，$\|TS\|_1 \le \|T\|_2\|S\|_2$ が成り立つ．さらに

$$\mathrm{Tr}\,(ST) = \mathrm{Tr}\,(TS).$$

【定理 C.27】（ヒルベルト–シュミット定理） T を $\mathcal{H}$ 上のコンパクトな自己共役作用素とする．このとき，$\mathrm{CONS}\{e_n\}_{n=1}^\infty$ と実数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ があって

$$Te_n = \lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

かつ $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ が成り立つ．

(X,μ), (Y,ν) を測度空間とし，A を $L^2(Y,d\nu)$ から $L^2(X,d\mu)$ への線形作用素で $D(A) = L^2(Y,d\nu)$ を満たすものとする．$X \times Y$ 上の可測関数 $K(x,y)$ があって，

$$(Af)(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\,d\nu(y),\ \forall f \in L^2(Y,d\nu), \quad \mu\text{-a.e.}x \in X$$

が成り立つとき，A は K を積分核とする**積分作用素**といわれる．

$F \in L^2(X\times Y, d\mu\otimes d\nu)$ としよう．このとき，F を積分核とする，$L^2(Y,d\nu)$ から $L^2(X,d\mu)$ への有界線形作用素 T_F が

$$(T_F f)(x) = \int_Y F(x,y)f(y)\,d\nu(y), \quad f \in L^2(Y,d\nu),\ \mu\text{-a.e.}x \in X \qquad \text{(C.43)}$$

によって定義され

$$\|T_F\| \le \|F\|_{L^2(X\times Y, d\mu\otimes d\nu)}$$

が成り立つ．T_F を**ヒルベルト–シュミット型積分作用素**と呼ぶ．

【定理 C.28】 任意の $F \in L^2(X \times Y, d\mu \otimes d\nu)$ に対して，T_F はヒルベルト–シュミット型であり

$$\|T_F\|_2^2 = \int_{X \times Y} |F(x,y)|^2 \, d\mu(x) \, d\nu(x) \tag{C.44}$$

が成り立つ．

証明 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $L^2(Y, d\nu)$ の CONS とする．a.e.$x \in X$ に対して，Y 上の関数 F_x を

$$F_x(y) := F(x,y)^*, \quad y \in Y$$

によって定義すれば $\|T_F \phi_n\|^2 = \int_X d\mu(x) |\langle F_x, \phi_n \rangle_{L^2(Y,d\nu)}|^2$ と書ける．パーセヴァルの等式により

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle F_x, \phi_n \rangle|^2 = \|F_x\|_{L^2(Y,d\nu)}^2 = \int_Y |F(x,y)|^2 \, d\nu(x) < \infty.$$

ゆえに，単調収束定理により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_F \phi_n\|^2 = \int_{X \times Y} |F(x,y)|^2 \, d\mu(x) \, d\nu(x) < \infty.$$

よって，T_F はヒルベルト–シュミット型であり，(C.44) が成立する． ∎

次の定理は，$(X, \mu) = (Y, \nu)$ の場合，定理 C.28 の逆も成り立つことを示す：

【定理 C.29】 (X, μ) を測度空間とし，T を $L^2(X, d\mu)$ 上のヒルベルト–シュミット型作用素とする．このとき，$K \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ がただ 1 つ存在し

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y), \quad f \in L^2(X, d\mu), \quad \text{a.e.}x \in X \tag{C.45}$$

が成り立つ．さらに

$$\|T\|_2^2 = \int_{X \times X} |K(x,y)|^2 \, d\mu(x) \, d\mu(y). \tag{C.46}$$

証明 定理 C.28 があるので，K の存在と一意性だけを示せばよい．

$$T_1 = \frac{T + T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

とすれば，定理 C.25-(ii) と定理 C.26-(i) によって，T_1, T_2 は自己共役なヒルベルト–シュミット型作用素であり，$T = T_1 + iT_2$ と書ける．したがって，自己共役なヒルベルト–シュミット型作用素についていま述べた主張を証明すれば十分である．そこで，T を $L^2(X, d\mu)$ 上の自己共役なヒルベルト–シュミット型作用素とする．このとき，T は自己共役なコンパクト作用素であるから，定理 C.27 によって，CONS$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数列 $\{\lambda_n\}_n$ があって，$T\phi_n = \lambda_n \phi_n$，$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$．$\|T\phi_n\|^2 = \lambda_n^2$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$．各 $N \in \mathbb{N}$ に対して関数 $K_N(x, y)$ を

$$K_N(x, y) := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \phi_n(x) \phi_n(y)^*, \quad \text{a.e.}(x, y) \in X \times X$$

によって定義する．このとき，$K_N \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ である．さらに，$N > M \geq 1$ ならば

$$\|K_N - K_M\|_{L^2(X\times X, d\mu\otimes d\mu)}^2 = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

したがって，$\{K_N\}_{N=1}^{\infty}$ は $L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ のコーシー列をなす．ゆえに，$K \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ が存在して，$\|K_N - K\|_{L^2(X\times X, d\mu\otimes d\mu)} \to 0$ $(N \to \infty)$ が成り立つ．任意の $g, f \in L^2(X, d\mu)$ に対して，$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \phi_n, f \rangle \phi_n$ であるから

$$\begin{aligned}
\langle g, Tf \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \phi_n, f \rangle \langle g, \phi_n \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle g, T_{K_N} f \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle g \otimes f^*, K_N \rangle_{L^2(X\times X, d\mu\otimes d\mu)} \quad ((g \otimes f^*)(x, y) := g(x) f(y)^*) \\
&= \langle g \otimes f^*, K \rangle_{L^2(X\times X, d\mu\otimes d\mu)} \\
&= \langle g, T_K f \rangle .
\end{aligned}$$

したがって，$Tf = T_K f$．

（一意性）別に $F \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ があって，$T_K = T_F$ が成り立つとする．このとき，a.e.x に対して，$\langle K_x, f \rangle_{L^2(X, d\mu)} = \langle F_x, f \rangle$, $\forall f \in L^2(X, d\mu)$．したがって，$K_x = F_x$．ゆえに，フビニの定理により，$\int_{X\times X} |K(x, y) - F(x, y)|^2 \, d\mu(x) \, d\mu(y) = 0$．これは，$K = F$（$L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ の元として）を意味する． ∎

C.8.3 比較定理

【定理 C.30】 (X,μ) は σ-有限な測度空間とする．A, B を $L^2(X, d\mu)$ 上の有界線形作用素で

$$|(Af)(x)| \le (B|f|)(x), \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \tag{C.47}$$

を満たすものとする．このとき，B がヒルベルト–シュミットならば，A もヒルベルト–シュミットであり

$$\mathrm{Tr}\, A^* A \le \mathrm{Tr}\, B^* B \tag{C.48}$$

が成り立つ．

証明 $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j=1}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ を (X,μ) の測度有限の可測集合の集まりで $S_j \cap S_k = \emptyset$, $j \ne k$ を満たすものとする (i.e. 互いに素)．このとき，各 S_j の定義関数 χ_{S_j} は $L^2(X, d\mu)$ の元であり，$\|\chi_{S_j}\| = \sqrt{\mu(S_j)}$ が成り立つ．また，$e_j := \chi_{S_j}/\sqrt{\mu(S_j)}$ とすれば，$\{e_j\}_{j=1}^n$ は $L^2(X, d\mu)$ の正規直交系である．そこで，e_j $(j = 1, \cdots, n)$ から生成される n 次元部分空間を $D_{\mathcal{S}}$ とし，この部分空間への正射影作用素を $P_{\mathcal{S}}$ とする．このとき，$P_{\mathcal{S}} f = \sum_{j=1}^n \langle e_j, f\rangle\, e_j$, $f \in L^2(X, d\mu)$ である．$A_{\mathcal{S}} := P_{\mathcal{S}} A P_{\mathcal{S}}$, $B := P_{\mathcal{S}} B P_{\mathcal{S}}$ とおけば

$$(A_{\mathcal{S}} f)(x) = \int_X a(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad (B_{\mathcal{S}} f)(x) = \int_X b(x,y) f(y)\, d\mu(y),$$
$$f \in L^2(X, d\mu)$$

という表示が得られる．ただし

$$a(x,y) := \sum_{j,k=1}^n \langle e_k, Ae_j\rangle\, e_k(x) e_j(y), \quad b(x,y) := \sum_{j,k=1}^n \langle e_k, Be_j\rangle\, e_k(x) e_j(y).$$

$a, b \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$ であるから，$A_{\mathcal{S}}, B_{\mathcal{S}}$ はともにヒルベルト–シュミット型積分作用素である．(C.47) と $e_j \ge 0$ に注意すれば $|a(x,y)| \le b(x,y)$ がわかる．したがって

$$\|A_{\mathcal{S}}\|_2 \le \|B_{\mathcal{S}}\|_2 \le \|P_{\mathcal{S}}\|^2 \|B\|_2 \le \|B\|_2.$$

すなわち，$\|A_{\mathcal{S}}\|_2 \le \|B\|_2$．

$\mathcal{S}$ の形の集合の全体を S とすれば，$\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathsf{S}$ について，$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ ならば，$\mathcal{S} < \mathcal{S}'$ とすることにより，S は有向集合になり，$\{A_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathsf{S}\}$ は $\mathfrak{B}(L^2(X, d\mu))$ に

おけるネット（有向点集合）になる．(X,μ) は σ-有限なので，積分の定義まで遡ることにより，$L^2(X,d\mu)$ の任意の元は $\sum_{r=1}^N \alpha_r\chi_{S_r}$ $(\mu(S_r)<\infty,\ \alpha_r\in\mathbb{C},\ S_r\cap S_p=\emptyset,\ r\neq p)$ という型の階段関数で $L^2(X,d\mu)$ 収束の意味で近似できることがわかる．したがって，これを利用すれば，任意の $f\in L^2(X,d\mu)$ に対して，$A_{\mathcal{S}}f$ は Af に弱収束することが示される．そこで，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $L^2(X,d\mu)$ の CONS とすれば

$$\|A_{\mathcal{S}}\|_2^2=\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty|\langle f_m,A_{\mathcal{S}}f_n\rangle|^2.$$

したがって，ファトーの定理によって

$$\liminf_{\mathcal{S}}\|A_{\mathcal{S}}\|_2^2\geq\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty|\langle f_m,Af_n\rangle|^2=\sum_{n=1}^\infty\|Af_n\|^2.$$

ゆえに，$\sum_{n=1}^\infty\|Af_n\|^2\leq\|B\|_2^2$ であるので，A もヒルベルト–シュミット型であり，$\|A\|_2^2\leq\|B\|_2^2$ が成り立つ．これは (C.48) を意味する．∎

(C.47) が成り立つとき，「B は点別に A を抑える」といわれる．

ノート

積公式 (C.31) の究極的な形が加藤敏夫によって与えられている [8]．また，近年，(C.30) あるいは (C.31) の型の近似定理（極限定理）を強収束ではなく，それよりも強い，作用素ノルムの収束で証明する研究が著しく発展し，応用範囲が広がっている．この方面の研究の概要については，たとえば，[7] とそこに引用されている文献を参照されたい．

関連図書

[1] 新井朝雄，『ヒルベルト空間と量子力学』，共立出版，1997.

[2] 新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[3] 新井朝雄，『量子統計力学の数理』，共立出版，2008.

[4] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』，朝倉書店，1999.

[5] P. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 238–242.

[6] 日合文雄・柳研二郎，『ヒルベルト空間と線形作用素』，牧野書店，1995.

[7] T. Ichinose and H. Tamura, Results on convergence in norm of exponential product formulas and pointwise of the corresponding integral kernels, *Operator Theory; Advances and Applications*, Vol.190, 315–327, Birkhäuser, 2009.

[8] T. Kato, Trotter's product formula for arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups, in *Topics in Functional Analysis* (I. Gohberg and M. Kac, eds.), Academic Press, 1978, p.185–195.

[9] 加藤敏夫，『位相解析』，共立出版，1967（復刊版，2001）．

[10] 黒田成俊，『スペクトル理論 II』(岩波講座　基礎数学　解析学 (II) xi)，岩波書店，1979.

[11] 黒田成俊，『関数解析』，共立出版，1980.

[12] E. Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows*, Princeton University Press, 1970. http://www.math.princeton.edu/ nelson/books/flows.pdf.

[13] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysi*, Academic Press, 1972. Revised and Enlarged Edition, 1980.

[14] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis and Self-adjointness*, Academic Press, 1975.

[15] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, 1979.

[16] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[17] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, American Mathematical Society, 2005.

付録D

無限次元測度の存在定理

D.1 リース–マルコフ–角谷の定理

X を位相空間とする．X の開集合全体を含む最小の σ 加法族 $\mathfrak{B}_X$ を X の**ボレル集合体**と呼び，その元を X の**ボレル集合**という．

μ を可測空間 $(X, \mathfrak{B}_X)$ 上の測度としよう．任意の $A \in \mathfrak{B}_X$ に対して

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ かつ } K \text{ はコンパクト}\} \tag{D.1}$$

かつ

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid A \subset O \text{ かつ } O \text{ は開集合}\} \tag{D.2}$$

が成立するとき，μ は**正則** (regular) であるという．

各 $f \in C(X)$（X 上の複素数値連続関数の全体；付録 B を参照）に対して定まる閉集合

$$\mathrm{supp}\, f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \tag{D.3}$$

を f の**台**という．台がコンパクトである連続関数の全体を $C_{\mathrm{c}}(X)$ で表す．

$\mathfrak{B}$ を X の部分集合からなる 1 つの σ 加法族とし，μ を $(X, \mathfrak{B})$ 上の測度とするとき，各 $p > 0$ に対して

$$L^p(X, \mathfrak{B}, d\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ は } \mathfrak{B} \text{ 可測で } \int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

を定義する．ただし，$f(x) = g(x)$, μ-a.e.x ($f, g \in L^p(X, \mathfrak{B}, d\mu)$) のとき，$f = g$ とする．

次の事実は基本的である[1]：

【命題 D.1】 X を局所コンパクト・ハウスドルフ空間，μ を $(X, \mathfrak{B}_X)$ 上の正則な有限測度とする．このとき，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して，$C_c(X)$ は $L^p(X, \mathfrak{B}_X, d\mu)$ で稠密である．

この命題の特別な場合として，次の事実が導かれる：

【命題 D.2】 X をコンパクト・ハウスドルフ空間，μ を $(X, \mathfrak{B}_X)$ 上の正則な有限測度とする．このとき，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して，$C(X)$ は $L^p(X, \mathfrak{B}_X, d\mu)$ で稠密である．

関数 $f \in C(X)$ について，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，集合 $S_\varepsilon^f := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクトであるとき，「f は**無限遠点で消える**」という．このような連続関数の全体を $C_\infty(X)$ で表す．これはベクトル空間 $C(X)$ の部分空間（線形部分空間）である．

$S_\varepsilon^f \subset \operatorname{supp} f$ であるから，$\operatorname{supp} f$ がコンパクトならば，S_ε^f もコンパクトである．したがって

$$C_c(X) \subset C_\infty(X)$$

が成り立つ．

容易にわかるように，X がコンパクトならば，$C_\infty(X) = C(X)$ である[2]．

$C_\infty(X)$ は上限ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関してバナッハ空間になる[3]．したがって，その双対空間 $C_\infty(X)^*$（$C_\infty(X)$ 上の連続（有界）線形汎関数の空間）が存在する．

$C(X)$ の部分空間 D 上の複素数値汎関数 $\ell : D \to \mathbb{C}$ が次の 2 つの条件を満たすとき，ℓ を D 上の**正の線形汎関数** (positive linear functional) または**非負線形汎関数**という．

(i)（線形性）$\ell(\alpha f + \beta g) = \alpha\ell(f) + \beta\ell(g), \quad f, g \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

[1] 証明については，たとえば，日合文雄・柳研二郎，『ヒルベルト空間と線形作用素』（牧野書店，1995）の補題 A.2.4 を参照．

[2] $\because$ S_ε^f は閉集合であるから，X がコンパクトならば，S_ε^f はコンパクトである．

[3] 証明の方法は定理 B.1 のそれと同様．

(ii) （非負性）任意の非負値関数 $f \in D$ ($f(x) \geq 0, \forall x \in X$) に対して $\ell(f) \geq 0$.

【補題 D.3】 X をコンパクト・ハウスドルフ空間とする．このとき，$\ell : C(X) \to \mathbb{C}$ が正の線形汎関数ならば，$\ell \in C(X)^*$ であり，$\|\ell\| = \ell(1)$ である．

証明 任意の $f \in C(X) \setminus \{0\}$ に対して，$1 \pm f(x)/\|f\|_\infty \geq 0,\ \forall x \in X$ であるから，ℓ の非負性により，$\ell(1 \pm f/\|f\|_\infty) \geq 0$．したがって，$\ell$ の線形性を使えば，$\ell(1) \pm \ell(f)/\|f\|_\infty \geq 0$．すなわち，$|\ell(f)| \leq \|f\|_\infty \ell(1)$．この不等式は $f = 0$ の場合，明らかに成り立つ．したがって，$\ell \in C(X)^*$ かつ $\|\ell\| \leq \ell(1)$．他方，$\ell(1) \leq \|\ell\| \|1\|_\infty = \|\ell\|$ である．したがって，$\|\ell\| = \ell(1)$． ■

次の定理は，X が局所コンパクトハウスドルフ空間であるとき，$C_\infty(X)$ 上の任意の連続な正の線形汎関数 ℓ に X 上の正則な有限ボレル測度 μ_ℓ がただ 1 つ同伴し，$\ell(f)$ ($f \in C_\infty(X)$) が f の μ_ℓ に関する積分で表されることを語る：

【定理 D.4】（リース–マルコフ–角谷の表現定理[4]） X を局所コンパクト・ハウスドルフ空間とし，$\ell \in C_\infty(X)^*$ は正の線形汎関数とする．このとき，$(X, \mathfrak{B}_X)$ 上の正則な有限測度 μ_ℓ で

$$\ell(f) = \int_X f(x)\, d\mu_\ell(x), \quad f \in C_\infty(X) \tag{D.4}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．さらに，$\mu_\ell(X) = \|\ell\|$ が成り立つ．

✶ 注意 D.5 X がコンパクト・ハウスドルフ空間の場合には，補題 D.3 によって，「ℓ は $C(X)$ 上の正の線形汎関数である」と仮定するだけでよい．この場合，$\mu_\ell(X) = \ell(1)$ である．

D.2 コルモゴロフの定理

$\mathfrak{I}$ を無限集合，d を自然数とする．任意の自然数 n と直積集合 $\mathfrak{I}^n$ の任意の元 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して $\left((\mathbb{R}^d)^n, \mathfrak{B}^{dn}\right)$ 上の確率測度 $\mu_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}$ が付随し，次の 2 つの条件が満たされているとき，確率測度の族 $\{\mu_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \mid (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in$

[4] この定理の証明については，日合文雄・柳研二郎，『ヒルベルト空間と線形作用素』（牧野書店，1995）の定理 A.2.6 に丁寧でわかりやすい証明があるので，ここでは割愛する．

$\mathfrak{I}^n, n \in \mathbb{N}\}$ は**整合的** (consistent) であるという：

(K.1)（置換対称性）各 $n \in \mathbb{N}$ と任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$（$n$ 次の対称群）に対して

$$\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_{\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}}(B_{\sigma(1)} \times \cdots \times B_{\sigma(n)}), \quad B_j \in \mathfrak{B}^d,\ j = 1, \cdots, n. \tag{D.5}$$

(K.2) 任意の $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ と任意の $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathfrak{I}^m$ に対して

$$\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(B) = \mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m}(B \times (\mathbb{R}^d)^{m-n}), \quad B \in \mathfrak{B}^{dn}.$$

$\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を $\mathbb{R}$ の 1 点コンパクト化とする．したがって，それはコンパクトなハウスドルフ空間である．$\dot{\mathbb{R}}^d_\alpha := \dot{\mathbb{R}}^d$, $\alpha \in \mathfrak{I}$ の直積集合を $(\dot{\mathbb{R}}^d)^{\mathfrak{I}}$ とする：

$$(\dot{\mathbb{R}}^d)^{\mathfrak{I}} := \prod_{\alpha \in \mathfrak{I}} \dot{\mathbb{R}}^d_\alpha = \{(\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}} \mid \omega_\alpha = (\omega_{\alpha 1}, \cdots, \omega_{\alpha d}) \in \dot{\mathbb{R}}^d,\ \alpha \in \mathfrak{I}\}. \tag{D.6}$$

以下，この節を通して

$$\Omega := (\dot{\mathbb{R}}^d)^{\mathfrak{I}} \tag{D.7}$$

とおく．チコノフの定理により，Ω はコンパクトなハウスドルフ空間である．位相空間の無限直積の定義により，Ω の位相は，各 $\alpha \in \mathfrak{I}$ に対して，Ω の $\dot{\mathbb{R}}^d_\alpha$ への射影 $p_\alpha : \omega \mapsto \omega_\alpha$ が連続となるような最も弱い位相である[5]．

Ω 上の連続関数の全体を $C(\Omega)$ とする[6]．一般論の結果により，$C(\Omega)$ は上限ノルムでバナッハ空間になる．以下，$C(\Omega)$ はこの意味でのバナッハ空間として考える．

明らかに，$\mathfrak{I}$ を添え字集合とする $\mathbb{R}^d$ の直積 $(\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{I}}$ は Ω の部分集合である：

$$(\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{I}} \subset \Omega. \tag{D.8}$$

任意の $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}$, $\theta = (\omega'_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{I}}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して，和 $\omega + \theta \in (\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{I}}$ と実数倍 $a\omega \in (\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{I}}$ を

$$\omega + \theta := (\omega_\alpha + \omega'_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, \quad a\omega := (a\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}$$

---

[5] たとえば，竹ノ内 脩，『トポロジー』(廣川書店，1962) の定理 41.1 を参照．

[6] ウリゾーンの補題により，$C(\Omega)$ は "十分たくさんの" 元からなる．

によって定義すれば，$(\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{J}}$ は実ベクトル空間になる．各 $\alpha \in \mathfrak{J}$ に対して，$e_\alpha \in (\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{J}}$ を $(e_\alpha)_\beta := \delta_{\alpha\beta}$, $\beta \in \mathfrak{J}$ によって定義される元とすれば，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{J}}$ は線形独立である[7]．したがって，$(\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{J}}$ は無限次元実ベクトル空間である．したがって，もし，$(\mathbb{R}^d)^{\mathfrak{J}}$ 上に測度が存在すれば，それは無限次元実ベクトル空間上の測度，すなわち，無限次元測度である．

集合 Ω 上の関数は，$\omega_\alpha, \alpha \in \mathfrak{J}$ を変数とする関数（無限個の変数の関数）と見ることができる．そこで，これらの変数のうち，有限個の変数だけに依存する連続関数の全体を $C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ と記す．すなわち，$f \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ とは，ある $n \in \mathbb{N}$ と $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \subset \mathfrak{J}^n$ および $(\dot{\mathbb{R}}^d)^n$ 上の連続関数 u があって

$$f(\omega) = u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n}), \quad \omega \in \Omega \tag{D.9}$$

と表されることである．次の事実は基本的である：

【補題 D.6】 $C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ は $C(\Omega)$ で稠密である．

証明 ストーン–ヴァイエルシュトラースの定理を応用する．まず，$1 \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega) \subset \overline{C_{\mathrm{fin}}(\Omega)}$ は明らか．そこで，$\overline{C_{\mathrm{fin}}(\Omega)}$ は Ω の点を分離することを示せばよい．これは次のようにしてなされる．各 $\varepsilon > 0$ に対して，関数 $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g_\varepsilon(x) := x\, e^{-\varepsilon x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定義し，各 $\alpha \in \mathfrak{J}$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して $q_{\alpha j}^{(\varepsilon)} : \Omega \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$q_{\alpha j}^{(\varepsilon)}(\omega) := \begin{cases} g_\varepsilon(\omega_{\alpha j}) & ; \omega_{\alpha j} \neq \infty \text{ のとき} \\ 0 & ; \omega_{\alpha j} = \infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.10}$$

このとき，$q_{\alpha j}^{(\varepsilon)} \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ である．さて，$x, y \in \Omega$, $x \neq y$ とすれば，ある $\alpha \in \mathfrak{J}$ と j が存在して，$x_{\alpha j} \neq y_{\alpha j}$. このとき，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，$q_{\alpha j}^{(\varepsilon)}(x) \neq q_{\alpha j}^{(\varepsilon)}(y)$ となる．したがって，$\overline{C_{\mathrm{fin}}(\Omega)}$ は Ω の点を分離する． ∎

各 $\alpha \in \mathfrak{J}$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して，関数 $q_{\alpha j} : \Omega \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$q_{\alpha j}(\omega) := \begin{cases} \omega_{\alpha j} & ; \omega_{\alpha j} \neq \infty \text{ のとき} \\ 0 & ; \omega_{\alpha j} = \infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.11}$$

---

[7] 各 $n \in \mathbb{N}$ と任意の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$（ただし，$j \neq k \Longrightarrow \alpha_j \neq \alpha_k$）に対して，$\sum_{j=1}^n a_j e_{\alpha_j} = 0$ $(a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n) \Longrightarrow a_j = 0,\ j = 1, \cdots, n.$

これは，Ω 上の実数値関数でただ１つの変数に依存する関数であるが，連続関数ではない[8]．しかし，ボレル可測である．各 $\alpha \in \mathfrak{I}$ に対して

$$q_\alpha(\omega) := (q_{\alpha 1}(\omega), \cdots, q_{\alpha d}(\omega)) \in \mathbb{R}^d, \quad \omega \in \Omega \tag{D.12}$$

とおく．

【定理 D.7】(コルモゴロフの定理)　確率測度の族 $\{\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\}_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathfrak{I}^n, n\in\mathbb{N}}$ は整合的であるとする．このとき，可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ 上の確率測度 μ がただ１つ存在して，各 $n \in \mathbb{N}$，各 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathfrak{I}^n$ に対して，確率ベクトル $(q_{\alpha_1}, \cdots, q_{\alpha_n})$ の結合分布は $\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ に等しい．すなわち，任意のボレル集合 $B \in \mathfrak{B}^{dn}$ に対して

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid (q_{\alpha_1}(\omega), \cdots, q_{\alpha_n}(\omega)) \in B\}) = \mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(B). \tag{D.13}$$

証明　各 $f \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ に対して，$\ell_0(f) \in \mathbb{C}$ を

$$\ell_0(f) := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})$$

と定義する．ただし，f は (D.9) の形をもつとする．なお，この定義が意味をもつためには，別の $(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in \mathfrak{I}^m$ と $(\dot{\mathbb{R}}^d)^m$ 上の連続関数 v があって $f(\omega) = v(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m})$ と表されるとき

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n}) \\ = \int_{(\mathbb{R}^d)^m} v(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m})\, d\mu_{\beta_1,\cdots,\beta_m}(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m}) \tag{D.14}$$

を示す必要があるが，これは次のようにしてなされる．$\{\beta_1, \cdots, \beta_m\} \subset \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ として一般性を失わない．そこで，２つの場合に分けて考える．

(i) $n = m$ の場合．この場合，$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ であるから，ある置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ があって，$\beta_j = \alpha_{\sigma(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$ となっていなければならない．また，いまの場合 $f(\omega) = u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n}) = v(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_n})$．したがって

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^m} v(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m})\, d\mu_{\beta_1,\cdots,\beta_m}(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m})$$

[8] 関数 $f : \dot{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$；$x \mapsto f(x)$ を $x \neq \infty$ のとき，$f(x) := x$；$x = \infty$ のとき，$f(x) := 0$ によって定義すると，f は $x = \infty$ で不連続である．

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})\, d\mu_{\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}}(\omega_{\alpha_{\sigma(1)}}, \cdots, \omega_{\alpha_{\sigma(n)}})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n}) \quad (\because \text{(K.1)})$$

よって (D.14) が成立する.

(ii) $n > m$ の場合. この場合, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \backslash \{\beta_1, \cdots, \beta_m\} = \{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_n\}$, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \setminus \{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_n\} = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ とすれば, ある置換 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ があって, $\alpha_j = \gamma_{\tau(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$ が成り立つ. また, 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ があって $\beta_k = \gamma_{\sigma(k)}$ $(k = 1, \cdots, m)$. さらに

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} u(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(\omega)\, d\mu_{\gamma_{\tau(1)},\cdots,\gamma_{\tau(n)}}(\omega_{\gamma_{\tau(1)}}, \cdots, \omega_{\gamma_{\tau(n)}})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(\omega)\, d\mu_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\omega_{\gamma_1}, \cdots, \omega_{\gamma_n}) \ (\because \text{(K.1)})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^m} f(\omega)\, d\mu_{\gamma_1,\cdots,\gamma_m}(\omega_{\gamma_1}, \cdots, \omega_{\gamma_m}) \ (\because \text{(K.2)})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^m} f(\omega)\, d\mu_{\gamma_{\sigma(1)},\cdots,\gamma_{\sigma(m)}}(\omega_{\gamma_{\sigma(1)}}, \cdots, \omega_{\gamma_{\sigma(m)}}) \ (\because \text{(K.1)})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^m} v(\beta_1, \cdots, \beta_m)\, d\mu_{\beta_1,\cdots,\beta_m}(\omega_{\beta_1}, \cdots, \omega_{\beta_m}).$$

ゆえに (D.14) が成立する.

容易にわかるように, $\ell_0 : C_{\text{fin}}(\Omega) \to \mathbb{C}$; $f \mapsto \ell_0(f)$ は線形であり, $f \geq 0$ ならば $\ell_0(f) \geq 0$ である. したがって, ℓ_0 は $C_{\text{fin}}(\Omega)$ 上の正の線形汎関数である. また

$$|\ell_0(f)| \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^n} |f(\omega)|\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\omega_{\alpha_1}, \cdots, \omega_{\alpha_n}) \leq \|f\|_\infty.$$

したがって, ℓ_0 は $C_{\text{fin}}(\Omega)$ 上の有界な線形汎関数であり, $\ell_0(1) = 1$ を満たす. 補題 D.6 と拡大定理[9]により, ℓ_0 は $C(\Omega)$ 上の有界線形汎関数へと一意的に拡

[9] **【線形作用素の拡大定理】** $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ をバナッハ空間とし（それぞれのノルムを $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ で表す), $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の稠密な部分空間とする. $T : \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ は線形かつ有界であるとする. すなわち, $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, $u, v \in \mathcal{D}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$（線形性）かつ定数 $C > 0$ があって $\|T(u)\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}}$, $\forall u \in \mathcal{D}$（有界性）が成り立つとする. このとき, 有界線形作用素 $\widetilde{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ で $\widetilde{T}(u) = T(u)$, $\forall u \in \mathcal{D}$ かつ $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ となるものがただ 1 つ存在する. $\widetilde{T}$ を T の拡大と呼ぶ.
この定理の証明は, ヒルベルト空間上の線形作用素に関する拡大定理とまったく同様である.

大できる．この拡大を ℓ で表す．

ℓ も正であることを示すために，まず，$f \in C(\Omega)$ で $f(\omega) \geq c > 0, \forall\omega \in \Omega$（$c$ は定数）を満足するものを考える．$C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ の $C(\Omega)$ における稠密性により，$f_n \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ で $\|f_n - f\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$ となるものが存在する．$f_n = g_n + ih_n$ $(g_n, h_n : \Omega \to \mathbb{R})$ とすれば，任意の $\varepsilon \in (0, c)$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq n_0$ ならば

$$|g_n(\omega) - f(\omega)|^2 + |h_n(\omega)|^2 < \varepsilon^2, \quad \forall\omega \in \Omega.$$

したがって，$\|g_n - f\|_\infty \to 0 (n \to \infty)$ かつ $0 < f(\omega) - \varepsilon < g_n(\omega)$．ゆえに，$0 \leq \ell_0(g_n)$ となる．ℓ の定義により，$\lim_{n\to\infty} \ell_0(g_n) = \ell(f)$．したがって，$\ell(f) \geq 0$.

$f \in C(\Omega), f \geq 0$ の場合は，任意の $c > 0$ に対して，$f + c \geq c > 0$ であるから，いまの結果により，$0 \leq \ell(f + c) = \ell(f) + c$ である（$\ell(1) = \ell_0(1) = 1$ に注意）．そこで，$c \to 0$ とすれば，$\ell(f) \geq 0$．よって，ℓ は正の有界線形汎関数である．

前段の結果とリース–マルコフ–角谷の表現定理（定理 D.4）により，Ω 上の正則な有限測度 μ で

$$\ell(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega), \quad f \in C(X) \tag{D.15}$$

となるものがただ 1 つ存在する．明らかに，$\mu(\Omega) = \ell(1) = \ell_0(1) = 1$ であるから，μ は $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ 上の確率測度である．

任意の $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathfrak{J}^n$ に対して $q = (q_{\alpha_1}, \cdots, q_{\alpha_n})$ の結合分布を P とすれば，その定義によって

$$\int_\Omega e^{-ikq} d\mu(\omega) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{-ikx}\, dP(x), \quad k = (k_1, \cdots, k_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

が成り立つ．一方

$$q_\alpha^{(\varepsilon)}(\omega) := \left(q_{\alpha 1}^{(\varepsilon)}(\omega), \cdots, q_{\alpha d}^{(\varepsilon)}(\omega)\right) \in \mathbb{R}^d, \quad \omega \in \Omega$$

とおけば，$e^{-i\sum_{j=1}^n k_j q_{\alpha_j}^{(\varepsilon)}} \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ であるから

$$\int_\Omega e^{-i\sum_{j=1}^n k_j q_{\alpha_j}^{(\varepsilon)}}\, d\mu(\omega) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{-i\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^d k_{j\ell} x_{j\ell} \exp(-\varepsilon x_{j\ell}^2)}\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x)$$

両辺において，極限 $\varepsilon \to 0$ を考えると，ルベーグ優収束定理によって

$$\int_{\Omega} e^{-ikq}\, d\mu(\omega) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{-ikx}\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x)$$

が得られる．したがって，$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{-ikx}\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{-ikx}\, dP(x)$．ゆえに，定理 1.23 によって，$P = \mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ である． ∎

定理 D.7 における確率ベクトルの族 $\{q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ は $\mathcal{J}$ を添え字集合とする確率過程である（2.1 節を参照）．こうして，整合的な確率測度の族から確率過程の存在が導かれる．

定理 D.7 と定理 1.15 により，次の事実が導かれる：

【系 D.8】 μ を定理 D.7 の確率測度とし，ボレル可測関数 $f : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{C}$ は $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathcal{J}^n$ に対して．

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} |f(x_1,\cdots,x_n)|\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n} < \infty$$

を満たすとする．このとき

$$\int_{\Omega} f(q_{\alpha_1}(\omega),\cdots,q_{\alpha_n}(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1,\cdots,x_n)\, d\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}. \quad \text{(D.16)}$$

✱ 注意 D.9 $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ の場合を考え，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mu_n(\mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-j}) = 0$ $(j = 1,2,\cdots,d)\cdots(*)$ とする（$j=1$ の場合は，$\mu_n(\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) = 0$ と読む）．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $j = 1,\cdots d$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(\{\omega \in \Omega \mid \omega_{nj} = \infty\}) &\le \mu(\{\omega \in \Omega \mid q_{nj}(\omega) = 0\}) \\ &= \mu_n(\mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-j}) = 0.\end{aligned}$$

したがって，$\mathcal{N}_\infty := \{\omega \in \Omega \mid$ ある $n \in \mathbb{N}$ とある j に対して $\omega_{nj} = \infty\}$ とすれば，$\mathcal{N}_\infty \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{d} \{\omega \in \Omega \mid \omega_{nj} = \infty\}$ であるから

$$\mu(\mathcal{N}_\infty) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \mu(\{\omega \in \Omega \mid \omega_{nj} = \infty\}) = 0.$$

一方，$\Omega = \mathcal{N}_\infty \cup (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{N}_\infty \cap (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} = \emptyset$ であるから $\mu((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}) = 1$ となる．したがって，条件 $(*)$ が満たされる場合には，測度 μ は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度とみなせる（ボレル集合体は $\{B \cap (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \mid B \in \mathfrak{B}_\Omega\}$ とする）．

D.3　無限次元直積測度

コルモゴロフの定理の応用として，最も単純なクラスの無限次元測度の存在を証明しておこう．

【定理 D.10】 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{I}}$ を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ 上の確率測度の族とする．このとき，可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ 上の確率測度 μ が存在して，各 $n\in\mathbb{N}$，各 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathfrak{I}^n$ に対して，確率ベクトル $(q_{\alpha_1},\cdots,q_{\alpha_n})$ の結合分布は $\mu_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{\alpha_n}$（$\mu_{\alpha_1},\cdots,\mu_{\alpha_n}$ の直積測度）に等しい．

証明　$\mathbb{R}^{dn}$ 上の確率測度 $\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ が

$$\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n} := \mu_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{\alpha_n}$$

によって定義される．このとき，確率測度の族 $\{\mu_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\mid n\in\mathbb{N},\ \alpha_j\in\mathfrak{I},\ j=1,\cdots,n\}$ が整合的であることを示すのは容易である．したがって，定理 D.7 により，題意が成立する．∎

定理 D.10 にいう測度 μ を $\mu_\alpha, \alpha\in\mathfrak{I}$ の**無限直積**といい，$\mu=\otimes_{\alpha\in\mathfrak{I}}\mu_\alpha$ のように表す．

D.4　ミンロスの定理

一般に，確率空間 (M,Σ,ν) が与えられたとき，$\nu(S)=1$ となる真部分集合 $S\in\Sigma$ が存在するならば，$\Sigma_S := \{B\cap S\mid B\in\Sigma\}$ として，確率空間 (S,Σ_S,ν) が得られる．S は M よりも狭いので（ν に関する零集合だけ異なる），(S,Σ_S,ν) で考えるほうがより詳細な情報を引き出せる可能性がある．この意味において，そのような S を見出すことは重要である．この節では

$$Q := \dot{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} = \left\{\omega=(\omega_n)_{n=1}^\infty \mid \omega_n\in\dot{\mathbb{R}}\right\} \tag{D.17}$$

とし，$(Q,\mathfrak{B}_Q)$ 上の確率測度 μ について，$\mu(S)=1$ となる真部分集合 S の存在について考察する．

正の実数列 $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ $(\lambda_n>0, n\in\mathbb{N})$ で $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ を満たすものを任意に固定し，各実数 $s\in\mathbb{R}$ に対して，Q の部分集合

$$Q_s := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s \omega_n^2 < \infty \right\} \tag{D.18}$$

を導入する．容易にわかるように，Q_s は $(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ における和の演算と実数倍の演算に関して実ベクトル空間になる．任意の $\omega, \theta \in Q_s$ に対して

$$\langle \omega, \theta \rangle_{\lambda,s} := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s \omega_n \theta_n \tag{D.19}$$

は絶対収束し，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda,s}$ は Q_s の内積になる．絶対 2 乗総和可能な数列空間 ℓ^2（$= Q_0$ の複素化）と同様にして，Q_s は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda,s}$ に関して実ヒルベルト空間であることがわかる．

$\omega, \theta \in Q$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n||\theta_n| < \infty$ のとき

$$\langle \omega, \theta \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \theta_n \tag{D.20}$$

という記号を導入する．

$\omega \in Q_s, \theta \in Q_{-s}$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n||\theta_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{s/2}|\omega_n|)(\lambda_n^{-s/2}|\theta_n|) \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |\omega_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} |\theta_n|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\omega\|_{\lambda,s} \|\theta\|_{\lambda,-s} < \infty \end{aligned}$$

であるから，$\langle \omega, \theta \rangle$ は意味をもち

$$|\langle \omega, \theta \rangle| \le \|\omega\|_{\lambda,s} \|\theta\|_{\lambda,-s} \tag{D.21}$$

が成り立つ．したがって，$\theta \in Q_{-s}$ を止めて，$\langle \omega, \theta \rangle$ を ω の関数とみると，それは Q_s^*（Q_s の双対空間）の元を与える．逆に，任意の $\phi \in Q_s^*$ に対して，リースの表現定理を使うことにより，$\phi(\omega) = \langle \omega, \theta_\phi \rangle$ を満たす $\theta_\phi \in Q_{-s}$ が存在することがわかる．よって，対応：$\phi \mapsto \theta_\phi$ は Q_s^* と Q_{-s} のユニタリ同型を与える．

各 $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Sigma_{Q_s} := \{ B \cap Q_s \mid B \in \mathfrak{B}_Q \} \tag{D.22}$$

とおく．次の事実を確認しておこう：

【補題 D.11】 $s \geq 0$ とするとき，任意の $\omega \in Q_s$ に対して，$L_\omega(\theta) := \langle \omega, \theta \rangle$, $\theta \in Q_{-s}$ によって定義される関数 $L_\omega : Q_{-s} \to \mathbb{R}$ は $\Sigma_{Q_{-s}}$ 可測である．

証明　各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$L_\omega^{(N)}(\theta) := \sum_{n=1}^N \omega_n \theta_n$, $\theta \in Q_{-s}$ とおけば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\left\{\theta \in Q_{-s} \mid L_\omega^{(N)}(\theta) < a\right\} \in \Sigma_{Q_{-s}}$ は明らかであろう．したがって，$L_\omega^{(N)}$ は $\Sigma_{Q_{-s}}$ 可測である．$\lim_{N\to\infty} L_\omega^{(N)}(\theta) = L_\omega(\theta)$, $\theta \in Q_{-s}$ であるから，L_ω も $\Sigma_{Q_{-s}}$ 可測である．　■

【定理 D.12】 ある $\gamma > 0$ に対して，$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-\gamma} < \infty$ とする．$s \geq 0$ とし，$\chi : Q_s \to \mathbb{C}$ を Q_s 上の汎関数で次の性質をもつものとする：

(i) $\chi(0) = 1$.
(ii) （正型性[10]）各 $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z_n \in \mathbb{C}$, $\omega^{(n)} \in Q_s$ $(n = 1, \cdots, N)$ に対して $\sum_{n,m=1}^N z_n^* z_m \chi(\omega^{(n)} - \omega^{(m)}) \geq 0$.
(iii) （連続性）$\omega^{(n)}, \omega \in Q_s$，$\lim_{n\to\infty} \|\omega^{(n)} - \omega\|_{\lambda,s} = 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \chi(\omega^{(n)}) = \chi(\omega).$$

このとき，$(Q_{-(s+\gamma)}, \Sigma_{Q_{-(s+\gamma)}})$ 上の確率測度 $\mu_{-(s+\gamma)}$ で

$$\chi(\omega) = \int_{Q_{-(s+\gamma)}} e^{i\langle \omega, \theta \rangle} \, d\mu_{-(s+\gamma)}(\theta), \quad \omega \in Q_{s+\gamma} \tag{D.23}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明　証明を通して，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda,s}$, $\|\cdot\|_{\lambda,s}$ をそれぞれ，$\langle \cdot, \cdot \rangle_s$, $\|\cdot\|_s$ と記す．$N \in \mathbb{N}$ と $\omega \in Q$ に対して

$$\omega(N) := (\omega_1, \cdots, \omega_N, 0, 0, \cdots)$$

とおく．定理 2.4 と同様の方法により，$(Q, \mathfrak{B}_Q)$ 上の確率測度 μ が存在して，

$$\chi(\omega(N)) = \int_Q e^{i \sum_{n=1}^N \omega_n q_n(\theta)} \, d\mu(\theta) \tag{D.24}$$

が成り立つ．

条件 (i) と (iii) により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$\|\omega\|_s < \delta$, $\omega \in Q_s$ ならば $|1 - \chi(\omega)| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，特に，$\|\omega\|_s < \delta$ ならば

[10] 定義 2.1 を参照．

$\mathrm{Re}\,\chi(\omega) \geq 1-\varepsilon$. χ の正型性により，$|\chi(\omega)| \leq \chi(0) = 1$ が成り立つ（命題 2.2 を参照）．したがって，$\mathrm{Re}\,\chi(\omega) \geq -1$. また，$\|\omega\|_s \geq \delta$ ならば $\delta^{-2}\|\omega\|_s^2 \geq 1$ であるから，$-1 > 1-\varepsilon-2\delta^{-2}\|\omega\|_s^2$. ゆえに

$$\mathrm{Re}\,\chi(\omega) \geq 1-\varepsilon-2\delta^{-2}\|\omega\|_s^2, \quad \forall\omega \in Q_s. \tag{D.25}$$

正の実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\alpha > 0$ に対して，$\mathbb{R}^N$ 上の測度 $dP_{\alpha,N}$ を

$$dP_{\alpha,N}(x) = \prod_{n=1}^{N}(2\pi\alpha c_n)^{-1/2}\, e^{-x_n^2/2\alpha c_n}dx_n$$

によって定義する．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^N} dP_{\alpha,N}(x) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} x_i x_j\, dP_{\alpha,N}(x) = \alpha c_i \delta_{ij},$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\cdot x}\, dP_{\alpha,N}(x) = e^{-(\alpha/2)\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^2}$$

が成り立つ．そこで，(D.25) において，ω を $\omega(N)$ で置き換え，その両辺を $dP_{\alpha,N}(\omega_1,\cdots,\omega_N)$ で積分すれば

$$\int_Q e^{-(\alpha/2)\sum_{n=1}^{N} c_n q_n(\theta)^2}\, d\mu(\theta) \geq 1-\varepsilon-2\alpha\delta^{-2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^s c_n$$

を得る．いま，$C := \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^s c_n < \infty \cdots (*)$ となるように $\{c_n\}_n$ を選ぶ．この場合，上式で $N \to \infty$ とすれば，単調収束定理により（積分変数 θ を ω と書き直して）

$$\int_F e^{-(\alpha/2)\sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n(\omega)^2}d\mu(\omega) \geq 1-\varepsilon-2\alpha\delta^{-2}C$$

が導かれる．ただし，$F := \{\omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} c_n\omega_n^2 < \infty\}$. そして，$\alpha \downarrow 0$ とすれば，再び，単調収束定理により $\mu(F) \geq 1-\varepsilon$ が得られる．$\varepsilon > 0$ は任意であったから，$\mu(F) \geq 1$. 一方，$\mu(F) \leq 1$ は自明であるから，$\mu(F) = 1$ を得る．$(*)$ を満たす c_n として，$c_n = 1/\lambda_n^{s+\gamma}$ をとることができる．この場合，$F = Q_{-(s+\gamma)}$ であるから，$\mu(Q_{-(s+\gamma)}) = 1$. そこで，

$$\mu_{-(s+\gamma)}(B) := \mu(B), \quad B \in \Sigma_{Q_{-(s+\gamma)}} \tag{D.26}$$

とすれば

$$\chi(\omega(N)) = \int_{Q_{-(s+\gamma)}} e^{i\langle\omega(N),\theta\rangle}\, d\mu_{-(s+\gamma)}(\theta)$$

となる．$\omega \in Q_{s+\gamma}$ ならば，$\|\omega(N)-\omega\|_s \le \lambda^{-\gamma/2}\|\omega(N)-\omega\|_{s+\gamma} \to 0\ (N \to \infty)$ となるので，$\lim_{N\to\infty} \langle \omega(N), \theta\rangle = \langle \omega, \theta\rangle$, $\theta \in Q_{-(s+\gamma)}$ が成り立つ．したがって，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{N\to\infty} \int_{Q_{-(s+\gamma)}} e^{i\langle \omega(N),\theta\rangle}\, d\mu_{-(s+\gamma)}(\theta) = \int_{Q_{-(s+\gamma)}} e^{i\langle \omega,\theta\rangle}\, d\mu_{-(s+\gamma)}(\theta).$$

他方，χ の連続性により，$\lim_{N\to\infty} \chi(\omega(N)) = \chi(\omega)$．ゆえに (D.23) が成立する．一意性は，特性汎関数に付随する測度の有限次元分布の一意性（ボッホナーの定理（定理 1.32）にいう一意性）から導かれる． ∎

定理 D.12 は，実ヒルベルト空間上の正型汎関数について，ある興味深い結果を導く．この結果を証明するために，ある準備を行う．

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし，A を $\mathcal{H}$ 上の真に正の自己共役作用素で $A \ge c > 0$ を満たすものとする（$c > 0$ は定数）．したがって，逆作用素 A^{-1} が存在し，それは有界な非負自己共役作用素である．各実数 s に対して

$$\langle f, g\rangle_s := \left\langle A^{s/2} f, A^{s/2} g\right\rangle_{\mathcal{H}},\ f, g \in D(A^{s/2})$$

を定義すれば，$\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ は $D(A^{s/2})$ の内積である（$s \le 0$ ならば $D(A^{s/2}) = \mathcal{H}$ に注意），$s \ge 0$ ならば，$D(A^{s/2})$ は，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ に関して，ヒルベルト空間になる．このヒルベルト空間を $\mathcal{H}_s(A)$ と記す．明らかに，$\mathcal{H}_0(A) = \mathcal{H}$ である．容易にわかるように

$$\mathcal{H}_{s'} \subset \mathcal{H}_s, \tag{D.27}$$

$$\|f\|_s \le \frac{1}{c^{(s'-s)/2}} \|f\|_{s'}, \quad 0 \le s < s',\ f \in \mathcal{H}_{s'} \tag{D.28}$$

が成り立つ．ただし，$\|g\|_t := \sqrt{\langle g, g\rangle_t}$, $t \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{H}_t(A)$.

$s < 0$ に対しては，$\mathcal{H}$ の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ に関する完備化を $\mathcal{H}_s(A)$ とする．ヒルベルト空間の集合 $\{\mathcal{H}_{-s}(A)\}_{s>0}$ については

$$\mathcal{H}_{-s} \subset \mathcal{H}_{-s'}, \tag{D.29}$$

$$\|f\|_{-s'} \le c^{-(s'-s)/2} \|f\|_{-s}, \quad s' > s > 0 \tag{D.30}$$

が成り立つ．

任意の $s \geq 0$ と $f \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{H}_s(A)$ に対して，シュヴァルツの不等式により

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\left\langle A^{-s/2}f, A^{s/2}g\right\rangle\right| \leq \left\|A^{-s/2}f\right\|\left\|A^{s/2}g\right\|$$

が成り立つから

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{-s}\|g\|_s, \quad s \geq 0,\ f \in \mathcal{H},\ g \in \mathcal{H}_s(A) \tag{D.31}$$

となる．

ヒルベルト空間の集合 $\{\mathcal{H}_s(A)\}_{s\in\mathbb{R}}$ を A に同伴する**ヒルベルトスケール**という．

次の補題はヒルベルトスケールに関する基本的な事実の1つを述べたものである：

【補題 D.13】 $0 \leq s < t$ ならば，$\mathcal{H}_t(A)$ は $\mathcal{H}_s(A)$ で稠密である．

証明 任意の $\psi \in \mathcal{H}_s(A)$ に対して，$\psi_n := E_A([0,n))\psi$, $n \in \mathbb{N}$ とおけば，$\psi_n \in \bigcap_{a>0}^{\infty} D(A^a) \subset D(A^{t/2})$ である．$\psi - \psi_n = E_A([n,\infty))\psi$ であるから

$$\left\|A^{s/2}\psi_n - A^{s/2}\psi\right\|^2 = \int_{[n,\infty)} \lambda^s \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2$$

となる．一方，$\psi \in D(A^{s/2})$ であるから，$\int_{[1,\infty)} \lambda^s \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 < \infty$ である．したがって，$\lim_{n\to\infty}\int_{[n,\infty)} \lambda^s \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 = 0$. ゆえに，$\|\psi_n - \psi\|_s \to 0$ $(n \to \infty)$．よって題意が成立する． ∎

以下，$\mathcal{H}$ が実ヒルベルト空間の場合を考える．このとき，すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{H}_s(A)$ も実ヒルベルト空間である．

$s > 0$ としよう．各 $\phi \in \mathcal{H}_{-s}$ に対して $\phi_n \in \mathcal{H}$ で $\lim_{n\to\infty}\|\phi_n - \phi\|_{-s} = 0$ となるものが存在する．このとき，(D.31) によって

$$|\langle \phi_n, f\rangle - \langle \phi_m, f\rangle| \leq \|\phi_n - \phi_m\|_{-s}\|f\|_s \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

したがって

$$\langle \phi, f\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle \phi_n, f\rangle, \quad \phi \in \mathcal{H}_{-s}(A),\ f \in \mathcal{H}_s(A) \tag{D.32}$$

は存在する．しかも，$\{\phi_n\}_n$ の取り方によらないことがわかる．このようにして拡張された $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{H}_{-s}(A)\times\mathcal{H}_s(A)$ 上の双線形形式を与える．(D.31) により

$$|\langle\phi, f\rangle| \le \|\phi\|_{-s}\|f\|_s, \quad \phi\in\mathcal{H}_{-s}(A),\ f\in\mathcal{H}_s(A) \tag{D.33}$$

が成り立つことに注意しよう．この双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}_{-s}(A)\times\mathcal{H}_s(A)\to\mathbb{R}$ をヒルベルト空間の対 $(\mathcal{H}_{-s}(A),\mathcal{H}_s(A))$ に同伴する**自然な双線形形式**と呼ぶ．

一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ の双対空間を $\mathcal{K}^*$ と記す．

【命題 D.14】　$s>0$ とする．

(i) ユニタリ変換 $U:\mathcal{H}_{-s}(A)\to\mathcal{H}_s(A)^*$ で

$$U(\phi)(f)=\langle\phi, f\rangle, \quad \phi\in\mathcal{H}_{-s}(A),\ f\in\mathcal{H}_s(A) \tag{D.34}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

(ii) ユニタリ変換 $V:\mathcal{H}_s(A)\to\mathcal{H}_{-s}(A)^*$ で

$$V(f)(\phi)=\langle\phi, f\rangle, \quad \phi\in\mathcal{H}_{-s}(A),\ f\in\mathcal{H}_s(A) \tag{D.35}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明　(i) 各 $\phi\in\mathcal{H}_{-s}(A)$ に対して，$L_\phi(f):=\langle\phi, f\rangle$, $f\in\mathcal{H}_s(A)$ とすれば，(D.33) によって，$L_\phi\in\mathcal{H}_s(A)^*$ であり，$\|L_\phi\|\le\|\phi\|_{-s}$ が成り立つ．$\phi\in\mathcal{H}$ ならば，$L_\phi(f)=\left\langle A^{-s/2}\phi, A^{s/2}f\right\rangle_{\mathcal{H}}$ と書けることに注意し，Ran $(A^{s/2})$ が $\mathcal{H}$ で稠密であること（補題 D.13）を使えば，

$$\sup_{f\in\mathcal{H}_s(A),\|f\|_s=1}|L_\phi(f)|=\left\|A^{-s/2}\phi\right\|=\|\phi\|_{-s}$$

が結論される[11]．したがって，$\phi\in\mathcal{H}$ ならば $\|L_\phi\|=\|\phi\|_{-s}$ となる．そこで，写像 $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_s(A)^*$ を $U(\phi):=L_\phi$, $\phi\in\mathcal{H}$ によって定義すれば，U は $\mathcal{H}_{-s}(A)$ の稠密部分空間としての $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_s(A)^*$ への等距離線形作用素である．したがって，拡大定理により，U は $\mathcal{H}_{-s}(A)$ から $\mathcal{H}_s(A)^*$ への等距離線形作用素に一意的に拡大される．この拡大も U と記す．

---

[11] 次の初等的な事実の応用：一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ の任意の元 ψ と $\mathcal{K}$ で稠密な任意の部分空間 D に対して，$\|\psi\|=\sup_{\eta\in D,\|\eta\|=1}|\langle\psi,\eta\rangle|$ が成り立つ．

U の全射性を示すために，任意の $L \in \mathcal{H}_s(A)^*$ をとろう．このとき，リースの表現定理により，ある $g \in \mathcal{H}_s(A)$ が存在して，$L(f) = \langle g, f \rangle_s$, $f \in \mathcal{H}_s(A)$ かつ $\|L\| = \|g\|_s$ が成り立つ．一方，$\mathcal{H}_{2s}(A)$ は $\mathcal{H}_s(A)$ で稠密であるから（補題 D.13），$g_n \in \mathcal{H}_{2s}(A)$ で $\|g_n - g\|_s \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものがとれる．このとき，$L(f) = \lim_{n\to\infty} \langle A^s g_n, f \rangle$ と書ける．一方，容易にわかるように，$\{A^s g_n\}_n$ は $\mathcal{H}_{-s}(A)$ におけるコーシー列である．したがって，$\phi \in \mathcal{H}_{-s}(A)$ が存在して，$\|A^s g_n - \phi\|_{-s} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．ゆえに，$L(f) = \langle \phi, f \rangle$ となる．すなわち，$U(\phi) = L$．よって，U は全射である．以上から，U はユニタリ変換であることが結論される．

(ii) (i) と同様． ∎

命題 D.14 は，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{H}_s(A)^*$ と $\mathcal{H}_{-s}(A)$ が，自然な双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を介して，同一視できることを意味する．これはヒルベルトスケールが有する美しい，重要な構造の 1 つである．

$\mathcal{H}, \mathcal{L}$ を可分な実ヒルベルト空間とし，$\mathcal{L}$ は $\mathcal{H}$ で稠密かつ

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}} \le C\|\psi\|_{\mathcal{L}}, \quad \psi \in \mathcal{L} \tag{D.36}$$

が成り立つとする．ただし，C は定数である．したがって，$\mathcal{H}^*$ を $\mathcal{H}$ と自然な仕方で同一視すれば

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L}^* \tag{D.37}$$

が成り立つ．

一般に，2 つのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ について，$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ ならば，各 $\psi \in \mathcal{H}_1$ に対して，$\mathcal{H}_2$ の元としての ψ を対応させる写像 $\iota : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2; \iota(\psi) := \psi$ が定義される．この写像 ι を $\mathcal{H}_1$ の $\mathcal{H}_2$ への**埋め込み**という．明らかに，ι は単射である．

$\mathcal{H}_1$ が $\mathcal{H}_2$ で稠密で，埋め込み ι がヒルベルト–シュミット型であるとき，$\mathcal{H}_2$ を $\mathcal{H}_1$ の**核型拡大**という．

【補題 D.15】 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_2$ がヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ の核型拡大であるための必要十分条件は，$\mathcal{H}_1$ 上の単射かつ非負のヒルベルト–シュミット型作用素 T が存在して，

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle T\psi, T\phi \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \psi, \phi \in \mathcal{H}_1 \tag{D.38}$$

が成り立つことである．この場合

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|\|\psi\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\psi \in \mathcal{H}_1. \tag{D.39}$$

証明（必要性）$\mathcal{H}_2$ が $\mathcal{H}_1$ の核型拡大であるとする．このとき，埋め込み $\iota : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ はヒルベルト–シュミット型であるから，$|\iota|^2 = \iota^*\iota$ は $\mathcal{H}_1$ 上の非負のトレース型作用素である．そこで，$T := |\iota|$ とおけば T は $\mathcal{H}_1$ 上の非負のヒルベルト–シュミット型作用素であり，単射である．定義によって，$T^2 = \iota^*\iota$ であるから，任意の $\psi, \phi \in \mathcal{H}_1$ に対して

$$\langle\psi,\phi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\iota(\psi),\iota(\phi)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \left\langle\psi, T^2\phi\right\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle T\psi, T\phi\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

したがって，(D.38) が成立する．

（十分性）(D.38) が成立するとしよう．このとき，任意の $\psi \in \mathcal{H}_1$ に対して

$$\|\iota(\psi)\|_{\mathcal{H}_2} = \|T\psi\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|T\|\|\psi\|_{\mathcal{H}_1}.$$

したがって，ι は有界線形であり，$\iota^*\iota = T^2$ が成り立つ．T^2 はトレース型作用素であるから，ι はヒルベルト–シュミット型である．■

✷ **注意 D.16**　(D.38) は，$\mathcal{H}_2$ が $\mathcal{H}_1$ の別の内積 : $(\psi, \phi) \mapsto \langle T\psi, T\phi\rangle_{\mathcal{H}_1}$ による完備化であることを意味する．したがって，$\mathcal{H}_1$ 上の単射かつ非負のヒルベルト–シュミット型作用素のそれぞれに $\mathcal{H}_1$ の核型拡大が付随している．

【補題 D.17】　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_2$ がヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ の核型拡大ならば，$\mathcal{H}_1^*$ は $\mathcal{H}_2^*$ の核型拡大である．

証明　補題 D.15 により，(D.38) が成立する．したがって，正の実数列 $\{t_n\}_n$ と $\mathcal{H}_1$ の CONS $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ で $Te_n = t_n e_n, n \in \mathbb{N}$ かつ $\sum_{n=1}^\infty t_n^2 < \infty$ を満たすものがある．このとき，$\{e_n/t_n\}_n$ は $\mathcal{H}_2$ の CONS である．

仮定により，$\mathcal{H}_2^* \subset \mathcal{H}_1^*$ である．

さて，$W_j : \mathcal{H}_j^* \to \mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2)$ を自然な反線形同型写像とする．すなわち，各 $F \in \mathcal{H}_j^*$ に対して，$W_j(F) \in \mathcal{H}_j$ は $F(\psi) = \langle W_j(F), \psi\rangle_{\mathcal{H}_j}$, $\psi \in \mathcal{H}_j$ を満足するベクトルである．$F_n := W_2^{-1}(e_n/t_n)$ とすれば，$\{F_n\}_n$ は $\mathcal{H}_2^*$ の CONS である．(D.38) によって，任意の $\psi \in \mathcal{H}_1$ に対して，$W_1 W_2^{-1}\psi = T^2\psi$ が成り立

つ．したがって，$J:\mathcal{H}_2^*\to\mathcal{H}_1^*$ を埋め込みとすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|J(F_n)\|_{\mathcal{H}_1^*}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|F_n\|_{\mathcal{H}_1^*}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|W_1F_n\|_{\mathcal{H}_1}^2$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|T^2(e_n/t_n)\right\|_{\mathcal{H}_1}^2=\sum_{n=1}^{\infty}t_n^2<\infty.$$

したがって，J はヒルベルト–シュミット型である．ゆえに題意が成立する．∎

さて，$\mathcal{L},\mathcal{H}$ を前述のようにとる（(D.36), (D.37) を参照）．各 $\psi\in\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}^*$ 上の関数 $f_\psi:\mathcal{L}^*\to\mathbb{R}$ を $f_\psi(\Phi):=\Phi(\psi)$, $\Phi\in\mathcal{L}^*$ によって定義し，すべての f_ψ $(\psi\in\mathcal{L})$ が可測となる最小の σ 加法族（$\mathcal{L}^*$ の部分集合からなる1つの σ 加法族）を $\Sigma(\mathcal{L}^*)$ とする．

【定理 D.18】（ミンロスの定理） $\chi:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ を連続な正型汎関数で $\chi(0)=1$ を満たすものとし，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}$ の核型核大であるとする．このとき，$(\mathcal{L}^*,\Sigma(\mathcal{L}^*))$ 上の確率測度 $\mu_{\mathcal{L}^*}$ で

$$\chi(\psi):=\int_{\mathcal{L}^*}e^{i\Phi(\psi)}d\mu_{\mathcal{L}^*}(\Phi),\quad \psi\in\mathcal{L} \tag{D.40}$$

を満たすものがただ1つ存在する．

証明 補題 D.17 によって，$\mathcal{L}^*$ は $\mathcal{H}$ の核型拡大である．したがって，補題 D.15 によって，$\mathcal{H}$ 上の単射かつ非負のヒルベルト–シュミット型作用素 T が存在して $\langle\psi,\phi\rangle_{\mathcal{L}^*}=\langle T\psi,T\phi\rangle_{\mathcal{H}}$，$\psi,\phi\in\mathcal{H}$ が成立する．そこで，$A:=T^{-2}$ とすれば，これは真に正の自己共役作用素であり，任意の $\psi,\phi\in\mathcal{H}$ に対して

$$\langle\psi,\phi\rangle_{\mathcal{L}^*}=\left\langle A^{-1/2}\psi,A^{-1/2}\phi\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

と書ける．ゆえに，注意 D.16 によって，$\mathcal{L}^*=\mathcal{H}_{-1}(A)$ が成り立つ．

T は単射かつ非負のヒルベルト–シュミット型作用素であるから，正の実数列 $\lambda:=\{\lambda_n\}_n$ と $\mathcal{H}$ の CONS$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}<\infty$, $Ae_n=\lambda_ne_n$, $n\in\mathbb{N}$ を満たすものが存在する．この λ を用いて (D.18) によって定義される実ヒルベルト空間 Q_s を考える．$\theta\in Q_{-1}$ ならば，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}\theta_n^2<\infty$ であり，$\left\{\lambda_n^{1/2}e_n\right\}_n$ は $\mathcal{H}_{-1}(A)$ の CONS であるから，写像 $U:Q_{-1}\to\mathcal{H}_{-1}(A)=\mathcal{L}^*$ を

$$U(\theta):=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\lambda_n^{-1/2}(\lambda_n^{1/2}\,e_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\,e_n \tag{D.41}$$

によって定義でき，しかも U は等距離線形作用素であることがわかる．また，U は全射であることもわかる（∵ 任意の $\psi \in \mathcal{H}_{-1}(A)$ に対して，$\theta_n := \lambda_n \langle e_n, \psi \rangle_{-1}$ とおけば $\theta = (\theta_n)_n \in Q_{-1}$）．したがって，$U$ はユニタリである．

(D.41) から，U は Q_0 から $\mathcal{H}$ へのユニタリ変換であることもわかる．したがって，Q_0 上の連続な汎関数 χ_U を

$$\chi_U(\omega) := \chi(U(\omega)), \quad \omega \in Q_0 \tag{D.42}$$

によって定義できる．明らかに，$\chi_U(0) = 1$ であり，χ_U は正型である．ゆえに，定理 D.12 を $s = 0, \gamma = 1$ として応用することにより，$(Q_{-1}, \Sigma_{Q_{-1}})$ 上の確率測度 μ_{-1} で

$$\chi_U(\omega) = \int_{Q_{-1}} e^{i\langle \omega, \theta \rangle} \, d\mu_{-1}(\theta), \quad \omega \in Q_1 \tag{D.43}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．そこで，μ_{-1} の U による像測度を $\mu_{\mathcal{L}^*}$ とすれば，定理 1.9 によって

$$\int_{Q_{-1}} f(U(\theta)) \, d\mu_{-1}(\theta) = \int_{\mathcal{L}^*} f(\psi) \, d\mu_{\mathcal{L}^*}(\psi)$$

が成り立つ．ただし，$f : \mathcal{L}^* \to \mathbb{C}$ は $\Sigma_{Q_{-1}}$ 可測で上式の両辺のいずれかは存在するとする．特に，各 $\psi \in \mathcal{L}$ に対して，$f(\Phi) = e^{i\Phi(\psi)}, \Phi \in \mathcal{L}^*$ とすれば

$$\int_{\mathcal{L}^*} e^{i\Phi(\psi)} \, d\mu_{\mathcal{L}^*}(\psi) = \int_{Q^{-1}} e^{iU(\theta)(\psi)} \, d\mu_{-1}(\theta) = \chi_U(U^{-1}(\psi)) = \chi(\psi).$$

ゆえに (D.40) が成立する．$\mu_{\mathcal{L}^*}$ の一意性は，定理 D.12 の場合と同様にして示される．∎

定理 D.18 では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の核型拡大を任意に 1 つ固定して考察した．そこで，次に，核型拡大をいわば可動的に捉え，核型拡大の無限列を考えてみる．すなわち，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ とし，可分な実ヒルベルト空間の列 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_n, \cdots$ で

$$\mathcal{H}_n \supset \mathcal{H}_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

を満たし，各 $n \geq 0$ に対して，$\mathcal{H}_n$ が $\mathcal{H}_{n+1}$ の核型拡大になっているものを考える．したがって，補題 D.15 によって，各 $n \geq 1$ に対して，$\mathcal{H}_n$ 上のヒルベル

ト−シュミット型作用素 T_n があって

$$\langle\psi,\phi\rangle_{\mathcal{H}_{n-1}}=\langle T_n\psi,T_n\phi\rangle_{\mathcal{H}_n}, \quad \psi,\phi\in\mathcal{H}_n$$

が成り立つ．したがって

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_{n-1}}\le\|T_n\|\|\psi\|_{\mathcal{H}_n}, \quad n\ge 1,\ \psi\in\mathcal{H}_n. \tag{D.44}$$

ヒルベルト空間の族 $\{\mathcal{H}_n\}_{n\ge 0}$ の共通部分

$$\mathcal{E}:=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n \tag{D.45}$$

は，ノルムの族 $\{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_n}\}_{n\ge 0}$ に同伴するフレッシェ空間である[12].

各 $m\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{H}_{m+1}$ は $\mathcal{H}_m$ で稠密であるから，各 $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ と任意の $\varepsilon>0$ と $\psi\in\mathcal{H}_n$ に対して，ベクトル列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ で $\psi_k\in\mathcal{H}_{n+k}$, $\|\psi-\psi_1\|_{\mathcal{H}_n}<\varepsilon/2$, $\|\psi_k-\psi_{k+1}\|_{\mathcal{H}_n}<\varepsilon/2^{k+1}$ を満たすものがとれる．このとき，$\{\psi_k\}_k$ は $\mathcal{H}_n$ の位相で収束し，その極限を ψ_∞ とすれば，$\psi_\infty\in\mathcal{E}$ かつ $\|\psi-\psi_\infty\|\le\varepsilon$ が示される．したがって，**各 $n\ge 0$ に対して，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}_n$ の位相で稠密である．**

フレッシェ空間 $\mathcal{E}$ は $\{\mathcal{H}_n\}_{n\ge 0}$ から定まる**可算ヒルベルト空間** (countably Hilbert space) と呼ばれる．それは，より一般的な**核型空間** (nuclear space) と呼ばれる空間の部分クラスをなす．

補題 D.17 によって

$$\mathcal{H}_n^*\subset\mathcal{H}_{n+1}^*, \quad n\ge 0$$

であり，$\mathcal{H}_{n+1}^*$ は $\mathcal{H}_n^*$ の核型拡大になっている．$\mathcal{E}$ の双対空間 $\mathcal{E}^*$ は

---

[12] ベクトル空間 X 上のセミノルムの族 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$（$A$ は添え字集合）は「$x\in X, \rho_\alpha(x)=0, \forall\alpha\in A\Longrightarrow x=0$」を満たすとき，$X$ の**点を分離する**という．X 上に点を分離するセミノルムの族 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき，すべての ρ_α が連続となる最も弱い位相を X 上の**自然な位相**または**局所凸位相**といい，この位相を X に導入してできる位相空間を $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ に同伴する**局所凸空間**という．局所凸空間 X のすべてのコーシー有向点族（ネット）が収束するならば，X は**完備**であるという．可算個（有限個または可算無限個）のセミノルムの族に同伴する局所凸空間で完備なものを**フレッシェ空間**という．

上述のノルムの族 $\{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_n}\}_{n\ge 0}$（したがって，それはセミノルムの族）が $\mathcal{E}$ の点を分離することは明らかであろう．また，$\mathcal{E}$ の点列 $\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ がすべての $n\ge 0$ に対して，$\|\psi_\ell-\psi_m\|_{\mathcal{H}_n}\to 0$ $(\ell,m\to\infty)$ を満たすならば（i.e. $\{\psi_\ell\}_\ell$ は $\mathcal{E}$ のコーシー列），ある $\psi\in\mathcal{E}$ があって，$\lim_{\ell\to\infty}\|\psi_\ell-\psi\|_{\mathcal{H}_n}=0$, $\forall n\ge 0$ となることも容易にわかる（$\mathcal{H}_n$ の完備性を使えばよい）．なお，$\mathcal{E}$ の原点における基本近傍系は，$\{V_{n_1,\cdots,n_N;\varepsilon}\mid N\in\mathbb{N}, n_j\in\{0\}\cup\mathbb{N},\ \varepsilon>0,\ j=1,\cdots,N\}$ で与えられる．ただし，$V_{n_1,\cdots,n_N;\varepsilon}:=\{\psi\in\mathcal{E}\mid\|\psi\|_{\mathcal{H}_{n_j}}<\varepsilon,\ j=1,\cdots,N\}$.

$$\mathcal{E}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^* \tag{D.46}$$

で与えられる[13]．明らかに

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{E}^* \tag{D.47}$$

が成り立つ．この型の三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{E}^*)$ を**ゲルファントの三つ組**という．

各 $f \in \mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{E}^*$ 上の関数 $F_f : \mathcal{E}^* \to \mathbb{R}$ を $F_f(\Phi) := \Phi(f), \Phi \in \mathcal{E}^*$ によって定義し，すべての $f \in \mathcal{E}$ に対して，F_f が可測となる最小の σ 加法族を $\mathcal{E}^*$ 上の**筒集合 $\boldsymbol{\sigma}$ 加法族**と呼び，これを $\Sigma(\mathcal{E}^*)$ で表す．

定理 D.18 はゲルファントの三つ組に関して次の形をとる：

【定理 D.19】 $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{E}^*)$ を上述のものとし，$\chi : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ は次の条件を満足するとする：

(i) $\chi(0) = 1$.

(ii)（正型性）任意の $N \in \mathbb{N}$, $z_n \in \mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, \cdots, N)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^{M} \chi(f_n - f_m) z_n^* z_m \geq 0.$$

(iii)（連続性）χ は $\mathcal{E}$ の位相で連続である．

このとき，$\mathcal{E}^*$ 上の確率測度 $\mu_{\mathcal{E}^*}$ で

$$\chi(f) = \int_{\mathcal{E}^*} e^{i\Phi(f)} \, d\mu_{\mathcal{E}^*}(\Phi), \quad f \in \mathcal{E} \tag{D.48}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明 (i) と (iii) によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N と $n_1, \cdots, n_N$ および $\delta > 0$ があって，$\|f\|_{\mathcal{H}_{n_j}} < \delta$ $(j = 1, \cdots, N)$ ならば $|1 - \chi(f)| < \varepsilon$ が成り

[13] 任意の $\Phi \in \mathcal{E}^*$ に対して，Φ の線形性と連続性は，定数 C と $n_1, \cdots, n_N$ があって $|\Phi(f)| \leq C(\|f\|_{\mathcal{H}_{n_1}} + \cdots + \|f\|_{\mathcal{H}_{n_N}})$, $f \in \mathcal{E}$ が成り立つことを意味する．これと (D.44) により，定数 C' と $m \in \mathbb{N}$ があって，$\|\Phi(f)\| \leq C'\| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_m}$, $f \in \mathcal{E}$ となる．これは，Φ が $\mathcal{H}_m$ の位相で連続であることを示す．すでに注意したように，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}_m$ で稠密であるから，拡大定理により，Φ は $\mathcal{H}_m^*$ の元に一意的に拡大できる．この意味で $\Phi \in \mathcal{H}_m^*$ である．したがって，$\mathcal{E}^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^*$．逆に，$\Phi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^*$ ならば，$\Phi \in \mathcal{H}_n^*$ となる n がある．$\mathcal{E}$ の位相で $f_k, f \in \mathcal{E}$, $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ ならば，$\mathcal{H}_n$ の位相で $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ であるから，$\Phi \in \mathcal{E}^*$ となる．したがって，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^* \subset \mathcal{E}^*$.

立つ．$m := \max\{n_1, \cdots, n_N\}$ とすれば，(D.44) によって，$\|f\|_m < \delta$ ならば $|1-\chi(f)| < \varepsilon$ となる．したがって，定理 D.12 と定理 D.18 の証明と同様にして，$\mathcal{E}^*$ を含む集合上の確率測度 μ が存在して，$\mu(\mathcal{H}_m^*) = 1$

$$\chi(f) = \int_{\mathcal{H}_m^*} e^{i\Phi(f)}\, d\mu_m(\Phi), \quad f \in \mathcal{E}$$

が成り立つことが示される．$\mathcal{H}_m^* \subset \mathcal{E}^*$ であるから，$\mu(\mathcal{E}^*) = 1$ が導かれる．そこで，$\mu_{\mathcal{E}^*} := \mu|\Sigma(\mathcal{E}^*)$ （μ の $(\mathcal{E}^*, \Sigma(\mathcal{E}^*))$ への制限）とすれば，これが求めるものである．(D.48) を満たす $(\mathcal{E}^*, \Sigma(\mathcal{E}^*))$ 上の確率測度 $\mu_{\mathcal{E}^*}$ の一意性は，定理 D.18 の場合と同様にして証明される． ∎

最後に，定理 D.19 の応用として，$\mathbb{R}^d$ 上の実緩増加超関数の空間上の確率測度の存在に関する定理を証明しよう．

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d), \alpha_j \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$ と $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d},$$
$$D^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d}$$

とおく（D_{x_j} は x_j に関する一般化された偏微分作用素）．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値急減少関数の空間とし，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と多重指数 α, β に対して

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \left\|x^\alpha D^\beta f\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| \tag{D.49}$$

を定義する．このとき，$\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のセミノルムの族であり，このセミノルムの族に関してフレッシェ空間になる[14]．$\mathbb{R}^d$ 上の実数値急減少関数の空間

$$\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mid f(x) \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^d\} \tag{D.50}$$

もセミノルムの族 $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ に関してフレッシェ空間である．この空間の双対空間 ($\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続線形汎関数の全体)，すなわち，$\mathbb{R}^d$ 上の実緩増

[14] 完備性の証明（それほど難しくはない）については，たとえば，吉田耕作・伊藤清三編，『函数解析と微分方程式—現代数学演習叢書 4』(岩波書店，1976) の第 4 章，例題 1 を参照．

加超関数の全体を $\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ とする．各 $f \in \mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上の関数 $L_f : \mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ を $L_f(\phi) := \phi(f)$, $\phi \in \mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ によって定義し，すべての $f \in \mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，L_f が可測となる最小の σ 加法族を $\Sigma(\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d))$ とする．次の定理が成り立つ：

【定理 D.20】($\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ に関するミンロスの定理)　$\mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数 $Z : \mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ は次の 3 つの条件を満たすとする：

(Z.1) $Z(0) = 1$.

(Z.2) （正型性）各 $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z_n \in \mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ $(n = 1, \cdots, N)$ に対して

$$\sum_{n,m=1}^{N} Z(f_n - f_m) z_n^* z_m \geq 0.$$

(Z.3) Z は $\mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上で連続である．

このとき，可測空間 $(\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d), \Sigma(\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)))$ 上の確率測度 $\mu_{\mathcal{S}'}$ で

$$Z(f) = \int_{\mathcal{S}'_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)} e^{i\phi(f)}\, d\mu_{\mathcal{S}'}(\phi), \quad f \in \mathcal{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d) \tag{D.51}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．

この定理を証明するには準備が必要である．d 次元の一般化されたラプラシアンを Δ とし，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素

$$H := -\frac{1}{2}\Delta + \frac{x^2}{2} + \frac{d}{2} \tag{D.52}$$

を考える．これは量子力学の文脈では，**d 次元量子調和振動子のハミルトニアン**である（ただし，もともとのハミルトニアンに定数 $d/2$ を加えてある）．H が自己共役であり，$H \geq d \geq 1$ であることはよく知られている[15]．運動量作用素

$$p_j := -iD_{x_j}, \quad j = 1, \cdots, d \tag{D.53}$$

を導入し

$$a_j := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(x_j + ip_j)}, \quad j = 1, \cdots, d \tag{D.54}$$

[15] 拙著，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）の第 6 章や新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 II』（朝倉書店，1999）の 3.8 節を参照．

とすれば（a_j は**消滅作用素**と呼ばれる），作用素の等式

$$H = \sum_{j=1}^{d} a_j^* a_j + d \tag{D.55}$$

が成り立つ[16]．容易にわかるように，ベクトル

$$\Omega := \frac{1}{\pi^{d/4}} e^{-x^2/2} \tag{D.56}$$

は $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の元であり

$$a_j \Omega = 0, \quad j = 1, \cdots, d \tag{D.57}$$

を満たす．さらに，各 $n_1, \cdots, n_d \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\Omega_{n_1,\cdots,n_d} := \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots n_d!}} (a_1^*)^{n_1} \cdots (a_d^*)^{n_d} \Omega \tag{D.58}$$

とすれば，$\{\Omega_{n_1,\cdots,n_d} \mid n_1, \cdots, n_d \in \mathbb{Z}_+\}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の CONS であり

$$H\Omega_{n_1,\cdots,n_d} = E_{n_1,\cdots,n_d} \Omega_{n_1,\cdots,n_d} \tag{D.59}$$

が成り立つ．ただし

$$E_{n_1,\cdots,n_d} := n_1 + \cdots + n_d + d, \quad n_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, d.$$

すなわち，$\Omega_{n_1,\cdots,n_d}$ は H の固有ベクトルであり，その固有値は $E_{n_1,\cdots,n_d}$ である．したがって，H のスペクトルは純離散的であり

$$\sigma(H) = \{E_{n_1,\cdots,n_d} \mid n_j \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ j = 1, \cdots, d\}$$

が成り立つ．各固有値の多重度は $d!$ 以下である．したがって，$s > d$ ならば

$$\sum_{n_1,\cdots,n_d=0}^{\infty} \frac{1}{E_{n_1,\cdots,n_d}^s} < \infty.$$

ゆえに，任意の実数 $s > d$ に対して，$H^{-s/2}$ はヒルベルト－シュミット型であることがわかる．

---

[16] 証明は，1 次元量子調和振動子の場合と同様（テンソル積の理論を使ってもよい）．テンソル積との対応は $H \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{d} I \otimes \cdots \otimes \overset{j\ \text{番目}}{H_1} \otimes \cdots \otimes I)$．ただし H_1 は $d = 1$ の場合の H である．

P を，$L^2(\mathbb{R}^d)$ から実閉部分空間 $L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$（$\mathbb{R}^d$ 上の実数値 L^2 関数の同値類の全体）への射影としよう：

$$Pf := f_{\mathrm{re}}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

ただし，f_{re} は f の実部である．このとき，$PH \subset HP$ が成り立つ（$D(H) = D(-\Delta) \cap D(x^2)$ と $-\Delta$, x^2 がともに関数の実性を保存することを用いればよい）．したがって，H は $L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ へ簡約される．この簡約部分を H_{re} とする．前段の事実により，$H_{\mathrm{re}}^{-s/2}$ もヒルベルト–シュミット型である．そこで

$$A := H_{\mathrm{re}}^{2d}$$

とすれば，A^{-1} は $L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上のヒルベルト–シュミット型作用素である．

A に同伴するヒルベルトスケールを $\{\mathcal{H}_s(A)\}_{s\in\mathbb{R}}$ とし，この中の部分列 $\{\mathcal{H}_n(A)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える．このとき，$\iota_n : \mathcal{H}_{n+1}(A) \to \mathcal{H}_n(A)$ $(n \geq 1)$ を埋め込みとすれば，$\iota_n^* \iota_n = A^{-1}$ となるので，ι_n はヒルベルト–シュミット型である．したがって

$$\mathcal{E}(A) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(A)$$

は可算ヒルベルト空間である．

定理 D.19 から定理 D.20 を導くには，次の補題が鍵となる：

【補題 D.21】　位相空間として $\mathcal{E}(A) = \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ．

さしあたり，この補題——それは全然自明ではない——を認めて，定理 D.20 を証明しよう．

定理 D.20 の証明

定理 D.19 において，$\mathcal{E} = \mathcal{E}(A)$, $\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$, $\chi = Z$ とすれば，定理 D.20 の仮定と補題 D.21 によって，定理 D.19 の仮定が満たされる．いまの場合，$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}(A)^* = \mathcal{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ であるから求める結果が得られる．　■

以下，補題 D.21 の証明を行う．

多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ に対して

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} := \left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{D.60}$$

を導入する．$\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のセミノルムの族であり，点を分離することは容易に確かめられる．

【補題 D.22】 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のセミノルムの族 $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ と $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ は同値である（i.e. 各セミノルムの族から定まる位相は一致する）．

証明 $d=1$ の場合だけを証明する（ここでの証明方法は一般の d の場合へと容易に拡張される）．証明を通して，$\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$ $(p \geq 1)$ と記す．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を任意にとる．$(1+x^2)^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$ であるから

$$\|f\|_2 = \|(1+x^2)^{-1}(1+x^2)f\|_2 \leq C\|(1+x^2)f\|_\infty, \quad C := \|(1+x^2)^{-1}\|_2.$$

したがって

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} \leq C\|(1+x^2)x^\alpha D^\beta f\|_\infty \leq C(\|f\|_{\alpha,\beta} + \|f\|_{\alpha+2,\beta}).$$

逆に，$f(x) = \int_{-\infty}^x f'(y)\, dy$ に注意すれば

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_1 \leq C\|(1+x^2)f'\|_2.$$

したがって

$$\|f\|_{\alpha,\beta} \leq C\|(1+x^2)(x^\alpha D^\beta f)'\|_2.$$

$(x^\alpha D^\beta f)' = x^{\alpha-1}D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f$ であるから

$$\|f\|_{\alpha,\beta} \leq C(\|f\|_{\alpha-1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha,\beta+1,2} + \|f\|_{\alpha+1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha+2,\beta+1,2})$$

となる．以上から，題意が成立する． ∎

【補題 D.23】 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ に対して，定数 $C_{\alpha,\beta} > 0$ があって

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} \leq C_{\alpha,\beta}\|H^{(|\alpha|+|\beta|)/2} f\|_2, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{D.61}$$

が成り立つ．

さらに，$D(H^{(|\alpha|+|\beta|)/2}) \subset D(\overline{x^\alpha D^\beta})$ であり

$$\|\overline{x^\alpha D^\beta} f\| \leq C_{\alpha,\beta}\|H^{(|\alpha|+|\beta|)/2} f\|, \quad f \in D(H^{(|\alpha|+|\beta|)/2})$$

が成り立つ．

証明　$d=1$ の場合だけを示す（一般の d の場合は，$d=1$ の場合の結果を用いて，帰納的に証明されうる[17]）．そこで，$a=a_1$,

$$\hat{N}=a^*a \tag{D.62}$$

とする[18]．このとき，$j=1$ のときの x_j,p_j をそれぞれ，x,p と書くことにすれば，(D.54) から

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^*),\quad D=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-a^*)\quad (\mathcal{S}(\mathbb{R})\text{ 上})$$

が成り立つ．したがって任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$ に対して

$$x^\alpha D^\beta f=\frac{1}{2^{(\alpha+\beta)/2}}(a+a^*)^\alpha(a-a^*)^\beta f,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

ここで

$$(a+a^*)^\alpha(a-a^*)^\beta f=\sum\underbrace{a^\#\cdots a^\#}_{\alpha+\beta\text{ 個}}f$$

に注意する．ただし，$a^\#$ は a または a^* を表す．さらに容易に証明される交換関係

$$aa^*f-a^*af=f$$

を用いれば，$x^\alpha D^\beta f$ は，結局，$(a^*)^n a^m f$ $(n,m\geq 0,\ n+m=\alpha+\beta)$ という形のベクトルの有限線形結合で表されることがわかる．したがって，各 $n,m\geq 0$ に対して，定数 $C_{n,m}$ があって

$$\|(a^*)^n a^m f\|_2\leq C_{n,m}\left\|\left(\hat{N}+1\right)^{(n+m)/2}f\right\|_2,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{D.63}$$

が証明されればよい．

(D.63) は $n=m=0$ のときは自明であるから，以下，$n+m\geq 1$ とする．$d=1$ の場合の固有ベクトルの系 $\{\Omega_k\}_{k=0}^\infty$ の完全正規直交性により

$$\|(a^*)^n a^m f\|_2^2=\sum_{k=0}^\infty|\langle\Omega_k,(a^*)^n a^m f\rangle_2|^2=\sum_{k=0}^\infty|\langle(a^*)^m a^n\Omega_k,f\rangle_2|^2$$

---

[17] $x^\alpha D^\beta=(x_1^{\alpha_1}D^{\beta_1})(x_2^{\alpha_2}D^{\beta_2})\cdots(x_d^{\alpha_d}D^{\beta_d})$ に注意せよ．$H_j=a_j^*a_j+1$ とすれば，$H_j\geq 1$ かつ $(H_1,\cdots,H_d)$ は強可換であり，$H=\sum_{j=1}^d H_j$ が成り立つので，$H_1^{m_1}H_2^{m_2}\cdots H_d^{m_d}\leq H^{m_1+\cdots+m_d}$, $m_j\in\mathbb{N}$ $(j=1,\cdots,d)$ が成り立つことも用いる．

[18] $\hat{N}$ は**個数作用素** (number operator) と呼ばれる．

が成り立つ．簡単に確かめられる関係式

$$a^*\Omega_k = \sqrt{k+1}\Omega_{k+1}, \quad a\Omega_k = \sqrt{k}\Omega_{k-1}, \quad k \geq 0$$

を用いると（$\Omega_{-1} := 0$）

$$(a^*)^m a^n \Omega_k = \begin{cases} \sqrt{k(k-1)\cdots(k-n+1)}\sqrt{(k-n+1)\cdots(k-n+m)}\Omega_{m+k-n} & ; k \geq n \\ 0 & ; k < n \end{cases}$$

となる．したがって

$$\|(a^*)^n a^m f\|_2^2 = \sum_{\ell=m}^{\infty} |\langle h_{n,m,\ell}\Omega_\ell, f\rangle_2|^2.$$

ただし

$$h_{n,m,\ell} := \sqrt{(\ell-m+1)(\ell-m+2)\cdots(\ell-m+n)} \times \sqrt{(\ell-m+1)(\ell-m+2)\cdots(\ell-1)\ell}.$$

$\hat{N}\Omega_k = k\Omega_k$ であるから，作用素解析により

$$h_{n,m,\ell}\Omega_\ell = K_{n,m}\Omega_\ell$$

と書ける．ただし，$\chi_{[m,\infty)}$ を $[m,\infty)$ の定義関数として

$$K_{n,m} := \chi_{[m,\infty)}(\hat{N})(\hat{N}-m+1)^{1/2}\cdots(\hat{N}-m+n)^{1/2} \times(\hat{N}-m+1)^{1/2}(\hat{N}-m+2)^{1/2}\cdots(\hat{N}-1)^{1/2}\hat{N}^{1/2}.$$

ゆえに

$$\|(a^*)^n a^m f\|_2^2 = \sum_{\ell=m}^{\infty} |\langle \Omega_\ell, K_{n,m} f\rangle_2|^2 \leq \|K_{n,m}f\|_2^2.$$

ここで，ベッセルの不等式を用いた．作用素解析により，任意の実数 $a > 0$ に対して $\|\chi_{[m,\infty)}(\hat{N})(\hat{N}-m+a)^{1/2}g\|_2 \leq \|(\hat{N}+a)^{1/2}g\|_2, \quad g \in D(\hat{N}^{1/2})$ である．この型の不等式を繰り返し用いることより

$$\|K_{n,m}f\|_2^2 \leq \left\|(\hat{N}+n+m)^{(n+m)/2} f\right\|_2^2$$

$$\leq (n+m)^{(n+m)} \left\| \left(\hat{N}+1\right)^{(n+m)/2} f \right\|_2^2$$

したがって

$$\|(a^*)^n a^m f\|_2 \leq (n+m)^{(n+m)/2} \left\| \left(\hat{N}+1\right)^{(n+m)/2} f \right\|_2. \tag{D.64}$$

ゆえに，(D.63) が成立する．

$\mathcal{L}(\{\Omega_{n_1,\cdots,n_d} \mid n_j \in \mathbb{Z}_+,\ j=1,\cdots,d\}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は任意の $r>0$ に対して，H^r の芯であるから，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は H^r の芯である．この事実と (D.61) を用いることにより（極限論法），後半の言明が証明される．■

【補題 D.24】　集合として，$\mathcal{E}(A) = \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ が成立する．

証明　任意の $n \geq 0$ に対して，$\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}_n(A)$ は容易にわかる．したがって，$\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(A)$．そこで，この逆の包含関係を示す．$f \in \mathcal{E}(A)$ とすれば，$f \in \bigcap_{m=0}^{\infty} D(H^m)$ である．したがって，補題 D.23 の後半の事実により，$f \in [\bigcap_{m=1}^{\infty} D(\Delta^m)] \cap [\bigcap_{m=1}^{\infty} D(x^{2m})]$．$f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D(\Delta^m)$ は，任意の $m \geq 0$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} k^{2m} |\hat{f}(k)|^2\, dk < \infty$ を意味する（$\hat{f}$ は f のフーリエ変換を表す）．これから，$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$ は x について無限回微分可能であることがわかる．同様に，$f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D\big(x^{2m}\big)$ からは $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} f(x)\, dx$ が k について無限回微分可能であることが導かれる．任意の多重指数 α, β に対して，部分積分により

$$x^\alpha D^\beta f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} i^{|\alpha|} (-i)^{-|\beta|}\, e^{ikx} D_k^\alpha \big(k^\beta \hat{f}(k)\big)\, dk$$

である．ただし，$D_k^\alpha := D_{k_1}^{\alpha_1} \cdots D_{k_d}^{\alpha_d}$．上述の事実とシュヴァルツの不等式を使うことにより

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big| D_k^\alpha \big(k^\beta \hat{f}(k)\big) \big|\, dk \leq C \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (1+k^2)^{2d} \big| D_k^\alpha \big(k^\beta \hat{f}(k)\big) \big|^2\, dk} < \infty.$$

ただし，$C := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (1+k^2)^{-2d}\, dk}$．したがって，$D_k^\alpha \big(k^\beta \hat{f}(k)\big)$ は可積分である．ゆえに，リーマン–ルベーグの定理により，

$$\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0$$

となる．これは $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を意味する．よって，題意が成立する．∎

補題 D.21 の証明の完結

任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$H^m f = \frac{1}{2^m} \sum \underbrace{T^\# \cdots T^\#}_{m\ 個} f$$

と書ける．ただし，$T^\#$ は $-\Delta$ または x^2 または d である．したがって，$H^m f$ は $x^\alpha D^\beta f$ という形のベクトルの有限線形結合で表される．ゆえに

$$\|H^m f\| \leq \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\alpha,\beta,2}$$

という評価が得られる．ただし，$C_{\alpha,\beta}$ は定数であり，右辺の和は有限項にわたる．この事実と補題 D.23 によって，セミノルムの族 $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ とセミノルムの族 $\{\|H^m \cdot\|_2 \mid m \in \mathbb{Z}_+\}$ は同値であることが結論される．これと補題 D.22 によって，$\mathcal{E}(A)$ の位相と $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の位相は一致することが導かれる．∎

ノート

ユークリッド空間上の関数からなる局所凸空間の位相的双対空間上の確率測度は具象的な問題の解析にとって重要な役割を担う．たとえば，$\mathcal{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度の存在に関するミンロスの定理（定理 D.20）は，**構成的場の量子論**—自由場と同値でない相対論的量子場の厳密な数学的構成と解析を目指す理論（4 次元時空の場合はできていない）—におけるユークリッド法と呼ばれるアプローチにとって本質的である．この側面に関する詳細については，たとえば，[4, 6, 15, 16] などを参照されたい．

関連図書

[1] 新井朝雄，『ヒルベルト空間と量子力学』，共立出版，1997.

[2] 新井朝雄・江沢 洋，『量子力学の数学的構造 I, II』，朝倉書店，1999.

[3] ブルバキ，『数学原論 積分 5』，東京図書，1970.

[4] 江沢 洋・新井朝雄，『場の量子論と統計力学』，日本評論社，1988.

[5] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions Vol. 4: Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, 1964.

[6] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, 1981.

[7] 日合文雄・柳研二郎,『ヒルベルト空間と線形作用素』, 牧野書店, 1995.

[8] 飛田武幸,『ブラウン運動』, 岩波書店, 1975.

[9] 伊藤 清,『確率論』, 岩波書店, 1991.

[10] 掛下伸一,『確率論』, サイエンス社, 1973.

[11] コルモゴロフ,『確率論の基礎概念 (第二版)』(根本伸司 訳), 東京図書, 1975.

[12] 折原明夫,『測度と積分』, 裳華房, 1997.

[13] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysi*, Academic Press, 1972. Revised and Enlarged Edition, 1980.

[14] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis and Self-adjointness*, Academic Press, 1975.

[15] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[16] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[17] 梅村泰郎, ヒルベルト空間の核型拡大と核型空間, 数学, **15** (1964), 193–210.

[18] 山崎泰郎,『無限次元空間の測度 上下』, 紀伊国屋書店, 1978.

索　　引

【記　号】

【数　字】

【ギリシャ文字】

【アルファベット】

【あ　行】

【か　行】

【さ　行】

【た 行】

【な　行】

【は　行】

【ま　行】

【や　行】

【ら　行】

Memorandum

Memorandum

著者紹介

あらい　あさお
新 井 朝 雄

1976年　千葉大学理学部物理学科卒業

1979年　東京大学大学院理学研究科修士課程修了

現　在　北海道大学大学院理学研究院数学部門 教授，理学博士

研究分野　数理物理学，数学，哲学

主要著書　『対称性の数理』(日本評論社)，『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版)，『フォック空間と量子場（上・下)』(日本評論社)，『多体系と量子場』(岩波書店)，『物理現象の数学的諸原理』(共立出版)，『現代物理数学ハンドブック』(朝倉書店)，『現代ベクトル解析の原理と応用』(共立出版)，『量子現象の数理』(朝倉書店)，『複素解析とその応用』(共立出版)，『物理の中の対称性』(日本評論社)，『量子統計力学の数理』(共立出版)，『美の中の対称性』(日本評論社)，『場の量子論と統計力学』(共著，日本評論社)，『量子力学の数学的構造（I, II)』(共著，朝倉書店)

量子数理物理学における汎関数積分法

Functional Integral Methods in Quantum Mathematical Physics

2010年 8 月 10 日　初版 1 刷発行

著　者　新 井 朝 雄　©2010

発行者　南 條 光 章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4-6-19
電話　東京 (03)3947-2511 番(代表)
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　加藤文明社

製　本　ブロケード

検印廃止
NDC 421.5
ISBN 978-4-320-01932-4

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan